DÉVELOPPEMENT 11

EXERCICES SUR LES SÉRIES

Proposition. — *Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} |f'(x)|\, dx$ converge. Alors la suite*

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^{n+1} f(x)dx$$

converge donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ ont même nature.

Démonstration. — Si $v_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx$ alors $\alpha_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) - \sum\limits_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ d'où en intégrant par parties

$$v_k = f(k) - [(x-(k+1))f(x)]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} (x-(k+1))f(x)dx = \int_k^{k+1} (x-(k+1))f(x)dx$$

donc $|v_k| \leq \displaystyle\int_k^{k+1} |x-k-1|\left|f'(x)\right| dx \leq \int_k^{k+1} \left|f'(x)\right| dx$ *i.e.* la suite $(\alpha_n)_n$ converge. □

Exemple. — La série $\displaystyle\sum \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n}$ converge.

En effet, posons $u_n = \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n}$ et $f(x) = \dfrac{e^{i\sqrt{x}}}{x}$ alors $f'(x) = O(x^{-3/2})$ donc $\int |f'|$ converge et on en déduit que la série $\sum u_n$ a la même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$. Or $\int_1^A \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x}dx = 2\int_1^{\sqrt{A}} \frac{e^{iu}}{u}du$ pour tout $A > 1$ et cette intégrale converge quand $A \to +\infty$ d'après la règle d'Abel ; sinon, on peut aussi écrire

$$\int_1^{\sqrt{A}} \frac{e^{iu}}{u}du = \left[\frac{e^{iu}}{iu}\right]_1^{\sqrt{A}} + \int_1^{\sqrt{A}} \frac{e^{iu}}{u^2}du = \frac{e^{i\sqrt{A}}}{i\sqrt{A}} - \frac{e^i}{i} + \int_1^{\sqrt{A}} \frac{e^{iu}}{u^2}du$$

or $\left|\frac{e^{i\sqrt{A}}}{i\sqrt{A}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$ tend vers 0 quand $A \to +\infty$ et d'autre part $\frac{e^{iu}}{u^2} = O(\frac{1}{u^2})$ donc l'intégrale $\int_1^{\sqrt{A}} \frac{e^{iu}}{u^2}du$ converge quand $A \to +\infty$ et, finalement $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u}du$ converge bien.

Proposition (formule des trapèzes). — *Soit f de classe C^2 sur $[a, a+1]$, alors*

$$\int_a^{a+1} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(f(a) + f(a+1)\right) - \frac{1}{2}\int_a^{a+1} (t-a)(a+1-t)f''(t)dt$$

Application. — Il existe une constante $K > 0$ telle que $n! \sim Ke^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}$.

On a $\log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log(k)$ et d'après la proposition

$$\int_k^{k+1} \log(x)dx = \frac{1}{2}\left(\log(k) + \log(k+1)\right) + \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \frac{(x-k)(k+1-x)}{x^2}dx$$

d'où en sommant pour $1 \leq k \leq n-1$

$$\int_1^{n} \log(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \log(k) - \frac{1}{2}\log(n) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{(x-k)(k+1-x)}{x^2}dx$$

or

$$\int_1^{n} \log(x)dx = [x\log(x) - x]_1^n = n\log(n) - n + 1$$

donc

$$n\log(n) - n + 1 = \log(n!) - \frac{1}{2}\log(n) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{(x-k)(k+1-x)}{x^2}dx$$

i.e.

$$\log(n!) = (n+\frac{1}{2})\log(n) - n + 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{(x-k)(k+1-x)}{x^2}dx.$$

On pose $v_k = \int_k^{k+1} \frac{(x-k)(k+1-x)}{x^2}dx$ alors $|v_k| \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}dx$ donc la série de terme général v_k converge et on a

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{1-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} v_k}.$$

Application. — Si $-1 < \mathrm{Re}\ s \leq 0$ alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^s} = \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{n^{-s}}{2} + c + o(1).$$

On applique la proposition à $f(t) = t^{-s}$ sur $[k, k+1]$ de sorte que

$$\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^s} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^s} + \frac{1}{(k+1)^s}\right) - \frac{1}{2}\int_k^{k+1}(t-k)(k+1-t)\frac{s(s+1)}{t^{s+2}}dt$$

d'où

$$\int_1^{n}\frac{dt}{t^s} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^s} + \frac{1}{(k+1)^s}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}u_k$$

où $u_k = -\frac{s(s+1)}{2}\int_k^{k+1}\frac{(t-k)(k+1-t)}{t^{s+2}}dt$. Or $-1 < \mathrm{Re}\ s \leq 0$ et $\sum |u_k| < \infty$ donc

$$\int_1^{n}\frac{dt}{t^s} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^s} + \frac{n^{-s}}{2} - \frac{1}{2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty}u_k - \sum_{k=n}^{+\infty}u_k\right)$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^s} = \int_1^{n}\frac{dt}{t^s} - \frac{n^{-s}}{2} + c + \sum_{k=n}^{+\infty}u_k = \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{n^{-s}}{2} + c + o(1).$$

Leçons concernées

29 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples

30 Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numriques

Sébastien Pellerin