DÉVELOPPEMENT 13

THÉORÈME DE FEJER

Théorème. — *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue 2π-périodique, on pose $S_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$. La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément en moyenne de Cesaro vers f sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. — On a $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)dt = 0$ pour tout entier k non nul et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_0(t)dt = 1$. On pose $T_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} e_k$ et $D_n = \frac{T_0+\cdots+T_n}{n+1}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(t)dt = 1$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_k(t)dt = 1.$$

D'autre part, on vérifie aisément que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et tout $n \geq 1$, on a

$$T_n(x) = e^{-inx}\frac{e^{(2n+1)ix}-1}{e^{ix}-1} = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

donc

$$D_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T_k(x) = \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\sum_{k=0}^{n}\sin(\frac{n+1}{2}x) = \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{\frac{k+1}{2}ix}\right)$$

or on a

$$\sum_{k=0}^{n} e^{\frac{k+1}{2}ix} = e^{\frac{ix}{2}}\frac{e^{(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} = e^{\frac{(n+1)ix}{2}}\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

d'où

$$D_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\frac{\sin^2(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2.$$

Si $0 < \alpha < \pi$ et $x \in [-\pi, \pi]$ vérifie $|x| > \alpha$ alors

$$|D_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)\sin^2(\frac{\alpha}{2})}$$

et il s'ensuit que D_n converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)T_n(x-t)dt$$

donc

$$C_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt.$$

Puisque les fonctions que l'on intègre sont 2π-périodiques, on obtient en effectuant le changement de variables $u = x - t$

$$C_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)du.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction f est continue et 2π-périodique, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe $\alpha \in]0, \pi[$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on ait

$$|x-y| < \alpha \;\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f(x) - C_n(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-u) - f(x))D_n(u)du\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-u) - f(x)|\, D_n(u)du$$

d'où, en notant M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$, on a

$$|f(x) - C_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha\leq|u|\leq\pi} 2MD_n(u)du + \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\varepsilon D_n(u)du \leq \frac{M}{\pi}\int_{\alpha\leq|u|\leq\pi} D_n(u)du + \varepsilon.$$

Or D_n converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N \;,\; \int_{\alpha\leq|u|\leq\pi} D_n(u)du \leq \varepsilon$$

d'où

$$\forall n \geq N \;,\; \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x) - C_n(x)| \leq \frac{M}{\pi}\varepsilon + \varepsilon$$

d'où le résultat. □

Leçons concernées

08 Utilisation de la continuité uniforme en analyse

39 Transformation de Fourier et produit de convolution

40 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

46 Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications

Référence

X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.