DÉVELOPPEMENT 15

MÉTHODE DU GRADIENT À PAS CONJUGUÉ

Soit $A \in \mathrm{Sym}^{++}(n)$ et $b \in \mathbb{R}^n$, on note x_∞ la solution de $Ax = b$. On note

$$J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_\infty\}$, on pose $r_0 = b - Ax_0$ et $K_s = \mathrm{Vect}(r_0, Ar_0, \ldots, A^{s-1}r_0\}$.

Lemme. — *Pour tout $s \geq 0$, J admet un unique minimum sur $x_0 + K_s$ que l'on note x_s.*

Démonstration. — Puisque A est symétrique définie positive, l'application $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ définit un produit scalaire donc, d'après le théorème de projection sur un fermé, il existe un unique $x_s \in x_0 + K_s$ tel que

$$\|x_\infty - x_s\|_A = \inf_{x \in x_0 + K_s} \|x_\infty - x\|_A .$$

Mais on a

$$\|x - x_\infty\|_A^2 = \langle Ax, x\rangle - \langle Ax_\infty, x\rangle - \langle x, Ax_\infty\rangle + \langle Ax_\infty, x_\infty\rangle = 2J(x) + \|x_\infty\|_A^2$$

d'où

$$\inf_{x \in x_0 + K_s} \|x_\infty - x\|_A^2 = 2 \inf_{x \in x_0 + K_s} J(x) + \|x_\infty\|_A^2$$

or l'application racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc J admet un unique minimum atteint en x_s. □

Lemme. — *x_∞ est l'unique minimum de J sur $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. — On réitère ce calcul en remplaçant $x_0 + K_s$ par $\mathbb{R}^n$, on obtient

$$0 = 2 \inf_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) + \|x_\infty\|_A^2$$

d'où

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) = -\frac{1}{2}\langle Ax_\infty, x_\infty\rangle = -\frac{1}{2}\langle b, x_\infty\rangle = J(x_\infty).$$

□

Lemme. — *On a $\|x_s - x_\infty\|_A = \inf_{\substack{P \in \mathbb{R}_s[X] \\ P(0)=1}} \|P(A)(x_0 - x_\infty)\|_A$.*

Démonstration. — On a $x \in x_0 + K_s$ si et seulement s'il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1}) \in \mathbb{R}^s$ tels que

$$x = x_0 + \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_0 A^i r_0$$

i.e. tels que

$$x - x_\infty = x_0 - x_\infty + \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_0 A^i(b - Ax_0) = x_0 - x_\infty + \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_0 A^{i+1}(x_\infty - x_0)$$

i.e. si et seulement s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_s[X]$ vérifiant $P(0) = 1$ et tel que

$$x - x_\infty = P(A)(x_0 - x_\infty).$$

et le résultat annoncé en découle. □

Proposition. — *On a* $x_\infty = x_n$.

Démonstration. — Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A et $\lambda_n \geq \cdots \geq \lambda_1 > 0$ les valeurs propres de A. On écrit

$$x_0 - x_\infty = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n \ , \ \xi_i \in \mathbb{R}$$

alors

$$\|x_0 - x_\infty\|_A^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \lambda_i.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_s[X]$ tel que $P(0) = 1$ alors

$$P(A)(x_0 - x_\infty) = P(A)\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i P(A) e_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i P(\lambda_i) e_i$$

donc

$$\|P(A)(x_0 - x_\infty)\|_A^2 = \langle A \sum_{i=1}^{n} \xi_i P(\lambda_i) e_i, \sum_{i=1}^{n} \xi_i P(\lambda_i) e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 P(\lambda_i)^2 \lambda_i$$

d'où

$$\|P(A)(x_0 - x_\infty)\|_A^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \lambda_i\right) \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |P(\lambda)|^2 .$$

Soit $L(X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i - X}{\lambda_i}$ alors L est un polynôme de degré n, vérifiant $L(0) = 1$ et tel que $L(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ. On a donc

$$\|x_n - x_\infty\|_A^2 \leq \|L(A)(x_0 - x_\infty)\|_A \leq \|x_0 - x_\infty\|_A^2 \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |L(x)|^2 = 0$$

d'où $x_n = x_\infty$. □

Leçons concernées

12 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie

19 Problèmes d'extremums

25 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples

31 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(x) = 0$. Exemples