DÉVELOPPEMENT 17

THÉORÈME DE L'INVERSION LOCALE

Théorème. — *Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in \mathcal{U}$ tel que* $\det J_f(a) \neq 0$. *Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ de a et un voisinage $\mathcal{V}$ de $f(a)$ tels que $f : \mathcal{U}' \to \mathcal{V}$ soit un difféomorphisme.*

Démonstration. — L'application f est un difféomorphisme local en a si et seulement si l'application

$$x \mapsto (df_a)^{-1}\left(f(a+x) - f(a)\right)$$

est un difféomorphisme local en 0, on peut donc supposer que $a = 0$, $f(a) = 0$ et $df_a = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Puisque f est $\mathcal{C}^1$, il existe $r > 0$ tel que $\|x\| \leq r \Rightarrow \|df_x - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\| < \frac{1}{2}$ donc d'après l'inégalité de la moyenne

$$\forall x \in \overline{\mathbb{B}}(0,r),\ \|x - f(x)\| \leq \frac{\|x\|}{2}.$$

On fixe y tel que $\|y\| < \frac{r}{2}$ alors

$$\forall x \in \overline{\mathbb{B}}(0,r),\ \|y + x - f(x)\| \leq \|y\| + \|x - f(x)\| < r$$

et on peut donc définir l'application

$$\varphi : \overline{\mathbb{B}}(0,r) \to \overline{\mathbb{B}}(0,r), x \mapsto \varphi(x) = y + x - f(x).$$

qui est contractante puisque $\|d\varphi\| < \frac{1}{2}$ or $\overline{\mathbb{B}}(0,r)$ est une partie complète de $\mathbb{R}^n$ donc il existe un unique point $x \in \overline{\mathbb{B}}(0,r)$ tel que

$$x = \varphi(x) = y + x - f(x).$$

En fait, φ prend ses valeurs dans la boule ouverte, on a donc montré que pour tout $y \in \mathbb{B}(0, \frac{r}{2})$, il existe un unique $x \in \mathbb{B}(0,r)$ tel que $f(x) = y$ donc f réalise une bijection, que l'on note g, de $\mathcal{U} = f^{-1}\left(\mathbb{B}(0,\frac{r}{2})\right) \cap \mathbb{B}(0,r)$ sur $\mathcal{V} = \mathbb{B}(0,\frac{r}{2})$. L'application g est continue (comme restriction de f) et pour tous $x, x' \in \mathbb{B}(0,r)$, on a

$$\left\|f(x) - f(x')\right\| = \left\|\varphi(x) - \varphi(x')\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|x - x'\right\|$$

i.e. g^{-1} est 2-lipschitzienne. On a donc montré que f est un homéomorphisme local.

Soit $\alpha \in \mathcal{U}$ tel que dg_α soit inversible, on pose $\beta = g(\alpha)$ et $L = dg_\alpha$. Pour h proche de l'origine, on a $a + h \in \mathcal{U}$ et, par continuité de g, $k = g(\alpha + h) - g(\alpha)$ est proche de l'origine ; qui plus est

$$k = g(\alpha + h) - g(\alpha) \iff h = g^{-1}(\beta + k) - g^{-1}(\beta)$$

et par continuité de g et g^{-1}, on a k qui tend vers 0 si et seulement si h tend vers 0. On a

$$k = g(\alpha + h) - g(\alpha) = L(h) + \|h\|\,\varepsilon(\|h\|)$$

avec $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$, d'où

$$L^{-1}(k) = h + \|h\|\,L^{-1}(\varepsilon(\|h\|)) = g^{-1}(\beta + k) - g^{-1}(\beta) + \|h\|\,L^{-1}(\varepsilon(\|h\|)).$$

Comme $L^{-1}(k) = h + \|h\|\,L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))$, on a

$$\|h\| \leq \|h\|\left\|L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))\right\| + \left\|L^{-1}(k)\right\|$$

d'où

$$\|h\| \leq \frac{\left\|L^{-1}\right\|}{1 - \|L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))\|}\,\|k\|$$

et lorsque h et k tendent vers 0, $\frac{\|L^{-1}\|}{1-\|L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))\|}$ est borné, on note M un majorant. Il vient finalement

$$\|h\| \left\|L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))\right\| \leq M \|k\| \left\|L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))\right\|$$

et comme $\left\|L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))\right\|$ tend vers 0 lorsque k tend vers 0, on a $\|h\| \left\|L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))\right\| = o(\|k\|)$ donc

$$L^{-1}(k) = g^{-1}(\beta + k) - g^{-1}(\beta) + o(\|k\|)$$

i.e. g^{-1} est différentiable en $\beta = g(\alpha)$.

Enfin, puisque $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, puisque dg est continue et puisque dg_0 est inversible, il existe un voisinage $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ tel que dg_x soit inversible pour tout $x \in \mathcal{W}$. D'après ce qui précède, $g_{|\mathcal{W}}$ réalise une bijection de $\mathcal{W}$ sur $f(\mathcal{W})$. $\square$

Leçons concernées

06 Utilisation de théorèmes de point fixe

15 Différentiabilité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

Référence

P. Donato, *Calcul différentiel pour la licence*, Dunod, 2000.

Sébastien Pellerin