DÉVELOPPEMENT 18

THÉORÈME DE JOHN

Théorème de John. — *Un compact K de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 dans son intérieur est contenu dans un unique ellipsoïde de volume minimal.*

Démonstration. — On note $\mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives et on définit une application $\mu : \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n}) \to \mathbb{R}$ en posant $\mu(S) = \frac{1}{\sqrt{\det S}}$. Si $R, S \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$R = {}^tP \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{bmatrix} P \quad \text{et} \quad S = {}^tP \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix} P$$

où les r_i et s_j sont strictement positifs. La convexité de $\mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ assure que, pour tout $t \in [0,1]$, on a $(1-t)R + tS \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ d'où

$$\begin{aligned} \mu((1-t)R+tS) &= \mu({}^tP\mathrm{diag}((1-t)r_1+ts_1, \ldots, (1-t)r_n+ts_n)P) \\ &= \left(\det({}^tP)\prod_{i=1}^n((1-t)r_i+ts_i)\det(P)\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= |\det(P)|^{-1}\prod_{i=1}^n((1-t)r_i+ts_i)^{-\frac{1}{2}} \\ &= |\det(P)|^{-1}\prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{2}(\log((1-t)r_i+ts_i))} \\ &\leq |\det(P)|^{-1}\prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{2}((1-t)\log(r_i)+t\log(s_i))} \end{aligned}$$

par concavité du logarithme, puis

$$|\det(P)|\,\mu((1-t)R+tS) \leq \prod_{i=1}^n (r_i^{1-t}s_i^t)^{-\frac{1}{2}} \leq \left((\prod_{i=1}^n r_i)^{1-t}(\prod_{i=1}^n s_i)^t\right)^{-\frac{1}{2}}$$

et par convexité de $t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t}$, on a (en notant $R = \prod r_i$ et $S = \prod s_i$)

$$|\det(P)|\,\mu((1-t)R+tS) \leq e^{-\frac{1}{2}((1-t)\log\prod r_i + t\log\prod s_i)} \leq (1-t)e^{-\frac{1}{2}\log\prod r_i} + te^{-\frac{1}{2}\log\prod s_i}$$

i.e. $\mu((1-t)R+tS) \leq (1-t)\mu(R) + t\mu(S)$ donc l'application μ est convexe sur $\mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$. De plus, le cas d'égalité nécessite $r_i = s_i$ pour tout i *i.e.* $R = S$ et μ est donc strictement convexe.

Notons que la boule unité $\mathbb{B}_S$ pour un produit scalaire défini par $S \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ (*i.e.* pour un ellipsoïde) est l'image de la boule unité canonique $\mathbb{B}$ par $A = \sqrt{S^{-1}}$. En effet, on a

$$\|X\| \leq 1 \iff {}^tXX \leq 1 \iff {}^t(AX)S(AX) \leq 1 \iff AX \in \mathbb{B}_S.$$

Le théorème de changement de variables donne donc $v(\mathbb{B}_S) = |\det A|\,v(\mathbb{B})$ *i.e.* $v(\mathbb{B}_S) = \mu(S)v(\mathbb{B})$, il s'agit donc de minimiser μ sur l'ensemble des $S \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ telles que $K \subset \mathbb{B}_S$.

Notons que si $S \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ et $\lambda > 0$ vérifient $\lambda\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_S$ alors $|||S||| \leq \lambda^{-2}$. En effet, si $\|X\| \leq 1$ alors $\lambda X \in \mathbb{B}_S$ donc $\langle\sqrt{S}X, \sqrt{S}X\rangle = \langle SX, X\rangle \leq \lambda^{-2}$ et il s'ensuit que $|||\sqrt{S}||| \leq \lambda^{-1}$ d'où $|||S||| \leq \lambda^{-2}$.

Puisque K est borné, il existe $r > 0$ tel que $K \subset r\mathbb{B}$ *i.e.* $K \subset \mathbb{B}_{S_0}$ où $S_0 = r^{-2}\mathrm{I}_n$. On considère alors l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{S \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n}) \ ; \ K \subset \mathbb{B}_S \text{ et } \mu(S) \geq \mu(S_0)\}$$

qui est un ensemble convexe (du fait de la convexité de μ), non vide (puisque $S_0 \in \mathcal{C}$) et fermé (le seul point non trivial est que la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ reste symétrique *définie* positive ce qui est assuré par la condition $\mu(S) \geq \mu(S_0)$ *i.e.* $\det S \geq \det S_0 > 0$). Comme 0 est un point intérieur de K, il existe $\lambda > 0$ tel que K contienne $\lambda\mathbb{B}$ et il résulte donc de la remarque ci-dessus que $|||S||| \leq \lambda^{-2}$ pour tout $S \in \mathcal{C}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est donc compact. La fonction μ est continue sur le compact $\mathcal{C}$ donc admet un minimum qui est atteint exactement une fois du fait de la stricte convexité de μ. □

Application. — Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal.

Démonstration. — Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, on pose $K = \bigcup_{A \in G} A\mathbb{B}$. Alors K est compact (car image du compact $G \times \mathbb{B}$ par l'application continue $(A, X) \mapsto AX$) qui contient 0 dans son intérieur (puisque $\mathbb{B} \subset K$) donc K est contenu dans un unique ellipsoïde $\mathbb{B}_S$ de volume minimal.

Soit $B \in G$ alors (d'après la définition de K), on a $BK = K$ d'où $B^pK = K$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ or $\mathbb{B} \subset K \subset \mathbb{B}_{S_0}$ donc $\mathbb{B} \subset B^p\mathbb{B}_{S_0}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et il s'ensuit $1 = \mu(\mathrm{I}_n) \leq |\det B|^p \, \mu(S_0)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ donc $|\det B| = 1$. Si on pose $R = {}^tBSB$ alors $R \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$, $K \subset \mathbb{B}_R$ et $\det R = \det S$ donc $R = S$ par unicité de l'ellipsoïde $\mathbb{B}_S$. □

Leçons concernées

19 Problèmes d'extremum

28 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications

Référence

M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

Sébastien Pellerin