DÉVELOPPEMENT 20

OPÉRATEURS HYPERCYCLIQUES

Soit (E,d) un $\mathbb{C}-$espace vectoriel métrique complet séparable et A un opérateur continu de E.

Définition. — A est dit *hypercyclique* s'il existe $x \in E$ tel que $\{A^n(x), n \geq 0\}$ soit dense dans E.

Théorème. — *Pour que A soit hypercyclique, il suffit qu'il existe X et Y denses dans E et $B : Y \to Y$ tels que pour tous $x \in X$ et $y \in Y$ on ait $A^n(x) \to 0$, $B^n(y) \to 0$ et $AB(y) = y$.*

Démonstration. — • Tout d'abord, notons $HC(A)$ l'ensemble des $x \in E$ dont l'orbite $\{A^n(x), n \geq 0\}$ est dense dans E et S une partie dénombrable dense de E. Si $x \in HC(A)$ alors son orbite coupe toute boule ouverte donc pour tout $s \in S$ et tout $k \geq 1$, il existe $n \geq 0$ tel que $A^n(x) \in \mathbb{B}(s, \frac{1}{k})$ *i.e.* $x \in \Omega_{s,k}$ où

$$\Omega_{s,k} = \bigcup_{n \geq 0} (A^n)^{-1}(\mathbb{B}(s, \frac{1}{k})).$$

Supposons maintenant que $x \in \Omega_{s,k}$ pour tous $s \in S$ et $k \geq 1$. Considérons une boule ouverte $\mathbb{B}(y, \varepsilon)$, par densité de S dans E, il existe $s \in S$ tel que $d(s,y) < \frac{\varepsilon}{2}$; considérons un entier $k \geq 1$ tel que $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Par hypothèse sur x, on a $x \in \Omega_{s,k}$ *i.e.* il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $A^{n_0}(x) \in \mathbb{B}(s, \frac{1}{k})$, il s'ensuit par inégalité triangulaire que

$$d(A^{n_0}(x), y) \leq d(A^{n_0}(x), s) + d(s,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

i.e. l'orbite de x coupe toute boule ouverte $\mathbb{B}(y, \varepsilon)$ ce qui signifie que cette orbite est dense dans E. On a donc finalement

$$HC(A) = \bigcap_{\substack{s \in S \\ k \in \mathbb{N}^*}} \Omega_{s,k}.$$

Puisque l'opérateur A est continu, les $\Omega_{s,k}$ sont des ouverts de E donc $HC(A)$ est une intersection dénombrable d'ouverts de E.

• Considérons maintenant deux parties X et Y denses dans E et une application $B : Y \to Y$ vérifiant, pour tous $x \in X$ et $y \in Y$: $A^n(x) \to 0$, $B^n(y) \to 0$ et $AB(y) = y$. Montrer que A est hypercyclique revient à montrer que $HC(A) \neq \emptyset$, on va en fait montrer que $HC(A)$ est dense dans E ; d'après le théorème de Baire, il s'agit donc de montrer que les ouverts $\Omega_{s,k}$ sont denses dans E. Considérons un tel ouvert $\Omega_{s,k}$ et une boule ouverte $\mathbb{B}(y, \varepsilon)$ et montrons que $\Omega_{s,k} \cap \mathbb{B}(y, \varepsilon) \neq \emptyset$. Par densité de X et Y dans E, il existe $a \in X$ et $b \in Y$ tels que $d(a,y) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(b,s) < \frac{1}{2k}$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $x_n = a + B^n(b)$, alors $A^n(x_n) = A^n(a) + A^n B^n(b)$. Mais on a $AB(c) = c$ pour tout $c \in Y$, on en déduit aisément par récurrence (et puisque Y est stable par B) que $A^n B^n(b) = b$, d'où $A^n(x_n) = A^n(a) + b$ pour tout $n \geq 0$. On a alors

$$d\left(A^n(x_n), s\right) = d\left(A^n(a) + b, s\right) \leq d\left(A^n(a) + b, b\right) + d(b,s) < d\left(A^n(a) + b, b\right) + \frac{1}{2k}.$$

Or l'addition avec b (*i.e.* l'application $E \to E, t \mapsto t + b$) est continue sur E et $A^n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par hypothèse donc il existe un entier $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1\ ,\ d\left(A^n(x_n), s\right) < \frac{1}{k}$$

i.e. $x_n \in \Omega_{s,k}$ pour tout $n \geq N_1$. D'autre part, on a

$$d(x_n, y) = d\left(a + B^n(b), y\right) \leq d\left(a + B^n(b), a\right) + d\left(a, y\right) < d\left(a + B^n(b), a\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or l'addition avec a (*i.e.* l'application $E \to E, t \mapsto t + a$) est continue sur E et $B^n(b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par hypothèse donc il existe un entier $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2\ ,\ d(x_n, y) < \varepsilon$$

i.e. $x_n \in \mathbb{B}(y, \varepsilon)$ pour tout $n \geq N_2$. Ainsi, si $n \geq \sup\{N_1, N_2\}$, on a

$$x_n \in \mathbb{B}(y, \varepsilon) \quad \text{et} \quad x_n \in \Omega_{s,k}$$

i.e. on a bien la densité des $\Omega_{s,k}$ dans E et, d'après la remarque ci-dessus, il s'ensuit que l'opérateur A est hypercyclique. □

Application. — L'opérateur de dérivation sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est hypercylique.

Démonstration. — On considère l'espace des fonctions entières $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ muni de la topologie de la convergence compacte *i.e.* par exemple

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f, g)}{1 + d_n(f, g)} \quad \text{où} \quad d_n(f, g) = \sup_{|\zeta| \leq n} |f(\zeta) - g(\zeta)|\,.$$

L'espace $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ muni de cette métrique est complet et séparable. On considère pour X et Y l'ensemble $\mathbb{C}[z]$ des polynômes complexes qui sont bien des parties denses dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ (il suffit de tronquer le développement en série entière en 0) et on pose

$$B : \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]\ ,\ \sum_{p=0}^{d} a_p X^p \mapsto \sum_{p=0}^{d} \frac{a_p}{p+1} X^{p+1}.$$

Soit $P \in \mathbb{C}[z]$, on a $AB(P) = P$, d'autre part il est clair que $A^n(P)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini puisque $A^n(P)$ est nul dès que n dépasse le degré de P. Il reste à montrer que $B^n(P)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, par linéarité de B il suffit de le montrer pour un monôme $P = z^p$; on a $B^n(z^p) = \frac{1}{(p+1)\ldots(p+n)} z^{p+n}$ d'où

$$\sup_{|\zeta| \leq \kappa} |B^n(\zeta^p)| = \frac{\kappa^{p+n}}{(p+1)\ldots(p+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi $B^n(P)$ tend vers 0 uniformément sur tout compact quand n tend vers l'infini et il s'ensuit que $B^n(P)$ tend vers 0 pour la distance d quand n tend vers l'infini. L'opérateur A est donc bien hypercyclique. □

Application. — Soit $\lambda > 1$ et $(e_i)_{i\geq 0}$ une base hilbertienne de $E = \ell^2$. L'opérateur A de E défini par $Ae_0 = 0$ et $Ae_{i+1} = \lambda e_i$ pour $i \geq 0$ est hypercylique.

Démonstration. — On considère l'espace $E = \ell^2(\mathbb{C})$ muni de sa structure hilbertienne ; il s'agit bien d'un espace complet séparable. On désigne par X l'ensemble des suites complexes nulles à partir d'un certain rang, par Y l'espace E et par B l'opérateur défini par $B(e_i) = \frac{1}{\lambda} e_{i+1}$ pour tout $i \geq 0$. Toutes les conditions du critères sont vérifiées : X et Y sont denses dans E, $AB(u) = u$ pour tout $u \in Y$, si $u \in X$ alors $A^n(u) = 0$ pour n assez grand et *a fortiori* $A^n(u)$ tend vers 0 quand n tend l'infini, enfin si $u \in Y$ alors $\|B^n(u)\|_2 = \frac{1}{\lambda^n} \|u\|_2$ or $\lambda > 1$ donc $\|B^n(u)\|_2$ tend vers 0 quand n tend l'infini. □

Leçons concernées

01 Espaces de fonctions. Exemples et applications

02 Exemples de parties denses et applications

05 Espaces complets. Exemples et applications

09 Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités

10 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications

25 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$.Exemples

Compléments

Structure de $HC(A)$. —
Supposons $HC(A)$ non vide alors $HC(A)$ contient un point $x \in E$ d'orbite dense. L'espace vectoriel E ne contient pas de point isolé or, pour tout $k \geq 0$, l'orbite de $A^k(x)$ ne diffère de l'orbite de x que par un nombre fini d'éléments, il s'ensuit que l'orbite de $A^k(x)$ est aussi dense dans E *i.e.* $A^k(x)$ est hypercylique. Par conséquent, $HC(A)$ contient l'orbite de x qui est une partie dense de E donc $HC(A)$ est dense dans E. Mais on a vu que $HC(A)$ est une intersection dénombrable d'ouverts donc $HC(A)$ est soit vide, soit un G_δ dense.

Le cas de la dimension finie. —
Supposons que E soit de dimension finie et considérons sa décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{s} F_{\lambda_i}$en sous-espaces caractéristiques. Supposons que A soit hypercyclique alors il existe $x \in E$ d'orbite dense. On écrit $x = x_1 + \cdots + x_s$ avec $x_i \in F_{\lambda_i}$ alors $A^n(x) = A^n(x_1) + \cdots + A^n(x_s)$ avec $A^n(x_i) \in F_{\lambda_i}$ pour tout $1 \leq i \leq s$. Il s'ensuit que pour toute valeur propre λ de A, la restriction A_λ de A à F_λ est un opérateur hypercylique. On a $A_\lambda = \lambda \mathrm{Id} + N$ où N est nilpotent donc, en notant d_λ la dimension de F_λ et pour $n \geq d_\lambda$, on a

$$A_\lambda^n(x) = \sum_{k=0}^{d_\lambda - 1} \mathrm{C}_n^k \lambda^{n-k} N^k(x).$$

Si x est d'orbite dense alors $N^0(x), N^1(x), \ldots, N^{d_\lambda - 1}(x)$ forment une base de F_λ et, pour tout $0 \leq k \leq d_\lambda - 1$, la suite $(\mathrm{C}_n^k \lambda^{n-k})_{n \geq 0}$ est dense dans $\mathbb{C}$. Cette dernière condition est impossible puisque la suite $(\left|\mathrm{C}_n^k \lambda^{n-k}\right|)_{n \geq d_\lambda}$ tend soit vers 0, soit vers l'infini, soit est constante égale à 1. Il en résulte que, dans le cas d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie, aucun opérateur n'est hypercyclique.

Un autre exemple. —
L'opérateur A sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ qui à f associe l'application $z \mapsto f(z+1)$ est hypercyclique. On note X l'ensemble des applications de la forme $z \mapsto e^{-z}P(z)$ où $P \in \mathbb{C}[z]$, Y l'ensemble des applications de la forme $z \mapsto e^{z}P(z)$ où $P \in \mathbb{C}[z]$ et B est l'application qui à f associe l'application $z \mapsto f(z-1)$. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ alors l'application $z \mapsto e^z f(z)$ est aussi entière donc approchable uniformément sur les compacts par une suite $(P_n)_n$ de polynômes donc f est approchable uniformément sur les compacts par la suite des applications $z \mapsto e^{-z}P_n$ *i.e.* X est dense dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. On obtient de même la densité de Y dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ et les autres vérifications sont claires.

Quelques commentaires sur le *shift*. —
• Dans la seconde application, le cas où $0 \leq \lambda \leq 1$ ne peut pas correspondre à un opérateur hypercyclique puisque dans ce cas on a $\|A^n(x)\| \leq |\lambda^n| \, \|x\| \leq \|x\|$ donc aucune orbite n'est dense.

• On note A l'opérateur défini dans la seconde application et on considère $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $|\mu| < 1$. Alors la suite $x_\mu = (\mu^k)_{k\geq 0}$ est clairement dans ℓ^2 et on vérifie aisément qu'il s'agit d'un vecteur propre pour A associé à la valeur propre μ ; on note F le sous-espace engendré par ces vecteurs. Considérons une suite $x = (x_k)_{k\geq 0}$ de ℓ^2 telle que $\langle x, x_\mu\rangle = 0$ pour tout $|\mu| < 1$ *i.e.* on a $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mu^k = 0$ pour tout $|\mu| < 1$ ce qui implique que $x = 0$ d'après le théorème des zéros isolés. Cela signifie que l'orthogonal de F est trivial donc que F est dense. Ainsi, l'opérateur A est hypercyclique mais admet un sous-espace invariant dense dans ℓ^2.

Si A est hypercyclique alors $HC(A)$ contient un sous-espace dense de H. —
On considère ici un opérateur hypercyclique A d'un espace de Hilbert H. Si x est un point d'orbite dense alors pour tout $y \in H$ non nul l'ensemble $\{\langle y, A^n x\rangle, n \geq 0\}$ est dense dans H (il suffit de remarquer que l'application $\xi \mapsto \langle y, \xi\rangle$ est continue et surjective de H dans $\mathbb{C}$).
Considérons maintenant un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul alors l'image de $P(A)$ est dense. En effet, si ce n'est pas le cas alors $(\mathrm{Im}\, P(A))^\perp = \ker P(A)^*$ contient un vecteur non nul *i.e.* $P(A)^*$ n'est pas injectif. Puisque c'est clairement absurde lorsque P est constant on peut, quitte à normaliser P, supposer que l'on a $P(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$ d'où

$$P(A)^* = (A^* - \overline{\lambda_1} I) \cdots (A^* - \overline{\lambda_n} I)$$

et le fait que $P(A)^*$ ne soit pas injectif signifie donc que A^* admet un vecteur propre : on écrit $Ay = \lambda y$ avec y non nul. On a donc pour tout $n \geq 0$

$$\langle y, A^n x\rangle = \langle A^{*n} y, x\rangle = \overline{\lambda}^n \langle y, x\rangle$$

Mais la suite $(\overline{\lambda}^n)_n$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$, on a donc une contradiction avec la remarque ci-dessus.
Notons $O_A(y)$ l'orbite de $y \in H$, on a clairement $O_A(P(A)x)) = P(A)(O_A(x))$ d'où par continuité de $P(A)$: $P(A)(\overline{O_A(x)}) \subset \overline{P(A)(O_A(x))} = \overline{O_A(P(A)x)}$. Mais si x est d'orbite dense alors $\overline{O_A(x)} = H$ or $P(A)$ est d'image dense donc $\overline{O_A(P(A)x)}$ contient une partie dense *i.e.* $P(A)x$ est aussi d'orbite dense. Ainsi, si A contient un point x d'orbite dense alors l'espace vectoriel $J = \{P(A)x, P \in \mathbb{C}[X]\}$ est un sous-espace dense de H formé de vecteurs d'orbite dense *i.e.* $HC(A)$ contient un sous-espace dense.

Le cas d'un opérateur compact. —
On considère ici un opérateur compact A d'un espace de Hilbert H. On admet les résultats suivants :
– $\rho(A) = \rho(A^*)$
– si A est compact alors $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \text{ non inversible}\}$ est un compact de $\mathbb{C}$
– A^* est compact
– si $\rho(A) = |\lambda|$ alors λ est une valeur propre de A

Si $\rho(A) = 0$ *i.e.* si $\lim_{n\to+\infty} \|A^n\|^{1/n} = 0$ alors A^n tend vers 0 donc A n'est pas hypercyclique. Sinon on a $\rho(A) > 0$ *i.e.* $\rho(A^*) > 0$ donc il existe $\lambda \in \sigma(A^*)$ telle que $|\lambda| = \rho(A^*)$. Or A est compact donc A^* est compact et il en résulte que λ est une valeur propre de A^* mais on a vu dans un commentaire précédent que c'est incompatible avec l'exitence d'un vecteur d'orbite dense pour A. Par conséquent, un opérateur compact n'est jamais hypercyclique.

Références

S. Gonnord et N. Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses, 1996.
Sujet d'analyse de l'agrégation externe 1999.

Sébastien Pellerin