DÉVELOPPEMENT 21

THÉORÈME DE STABILITÉ DE LIAPOUNOV

Théorème de Liapounov. — *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *avec* $f(0) = 0$ *et telle que* $\mathrm{Re}\ \lambda < 0$ *pour toute valeur propre* λ *de* df_0*. Alors pour* x_0 *voisin de* 0*, la solution* $x(t)$ *de* $X' = f(X), X(0) = x_0$ *tend exponentiellement vers* 0 *lorsque* t *tend vers l'infini.*

Démonstration. — • Soit A la matrice de df_0 dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A_1 = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & t_{i,j} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad |t_{i,j}| \leq \varepsilon,$$

on note B la matrice diagonale et C la matrice nilpotente. On note $x(t)$ une solution de $X' = f(X)$ et $z(t)$ une solution de $X' = AX$; on sait que $z(t) = e^{tA}z(0)$ mais on souhaite retrouver le comportement asymptotique de cette solution. En posant $z_1(t) = Pz(t)$, on obtient une solution de $X' = A_1X$. On peut alors écrire

$$\frac{d}{dt}\left\|z_1(t)\right\|^2 = 2\mathrm{Re}\ \langle z_1'(t), z_1(t)\rangle = 2\mathrm{Re}\ \langle A_1z_1(t), z_1(t)\rangle = 2\mathrm{Re}\ \langle Bz_1(t), z_1(t)\rangle + 2\mathrm{Re}\ \langle Cz_1(t), z_1(t)\rangle.$$

Soit $\Lambda > 0$ tel que $-\Lambda = \sup \mathrm{Re}\ \lambda_i$, alors

$$\mathrm{Re}\ \langle Bz_1, z_1\rangle = \mathrm{Re}\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \zeta_{1,i}\overline{\zeta_{1,i}} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\ \lambda_i \left|\zeta_{1,i}\right|^2 \leq -\Lambda \left\|z_1\right\|^2$$

et il existe une constante $d > 0$ telle que

$$|\langle Cz_1, z_1\rangle| \leq \|\!|C|\!\| \left\|z_1\right\|^2 \leq d\varepsilon \left\|z_1\right\|^2.$$

On obtient donc (quitte à choisir ε petit)

$$\frac{d}{dt}\left\|z_1(t)\right\|^2 \leq (-2\Lambda + 2d\varepsilon)\left\|z_1(t)\right\|^2 \leq -a\left\|z_1(t)\right\|^2$$

avec $a > 0$. Il en résulte que pour tout t on a

$$\left\|z_1(t)\right\|^2 \leq e^{-at}\left\|z_1(0)\right\|^2$$

puis qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\left\|z(t)\right\|^2 \leq ce^{-at}\left\|z(0)\right\|^2.$$

• Ce qui précède permet de définir un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ par

$$b(V, W) = \int_0^{+\infty} \langle e^{sA}V, e^{sA}W\rangle ds$$

dont on note respectivement q et N la forme quadratique et la norme associées ; en écrivant

$$q(V + tW) = q(V) + t^2q(W) + 2tb(V, W)$$

puis en dérivant pour $t = 0$, on obtient

$$dq_V(W) = \frac{d}{dt}q(V + tW)\Big]_{t=0} = 2b(V, W).$$

• On pose $f(u) = Au + r(u)$ alors

$$(q(x(t)))' = dq_{x(t)}\left(x'(t)\right) = 2b\left(x(t), x'(t)\right) = 2b\,(x(t), Ax(t)) + 2b\,(x(t), r(x(t)))$$

or pour tout $V \in \mathbb{R}^n$ on a

$$2b\,(V, AV) = \int_0^{+\infty} 2\langle e^{sA}V, e^{sA}AV\rangle ds = \left[\left\|e^{sA}V\right\|^2\right]_{s=0}^{s\to+\infty} = -\left\|V\right\|^2$$

d'où

$$(q(x(t)))' = -\left\|x(t)\right\|^2 + 2b\,(x(t), r(x(t)))\,.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|b\,(x(t), r(x(t)))| \leq N\,(x(t))\,N\,(r(x(t)))$$

mais $r(u) = f(u) - f(0) - df_0(u)$ donc par définition de la différentiabilité, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$N(u) \leq \alpha \Rightarrow N(r(u)) \leq \varepsilon N(u)$$

et il en résulte que pour $N(x(t)) \leq \alpha$ on a

$$(q(x(t)))' = -\left\|x(t)\right\|^2 + 2\varepsilon N\,(x(t))^2 \leq -\left\|x(t)\right\|^2 + 2\varepsilon q\,(x(t))\,.$$

L'équivalence des normes N et $\|\ \|$ montre que, quitte à choisir ε petit, on a

$$(q(x(t)))' \leq -\beta q\,(x(t)) \quad \text{avec} \quad \beta > 0.$$

• Tout d'abord on en déduit si $N(x_0) \leq \alpha$ alors $N\,(x(t)) \leq \alpha$ pour $t \geq 0$; en effet, sinon il existe un plus petit instant t_1 tel que $N\,(x(t_1)) = \alpha$ or $N\,(x(t))$ décroît au voisinage de t_1 et la valeur α est donc censée être atteinte avant t_1 ! D'autre part, $N\,(x(t))$ décroît sur le domaine de définition de $x(t)$ donc $x(t)$ n'explose pas en temps fini *i.e.* la solution $x(t)$ est définie sur $[0, +\infty[$. Enfin, on a

$$\left(e^{\beta t}q\,(x(t))\right)' = e^{\beta t}\left((q(x(t)))' + \beta q\,(x(t))\right) \leq 0$$

donc pour tout $t \geq 0$, on a

$$q\,(x(t)) \leq e^{-\beta t}q(x_0)$$

i.e. $x(t)$ tend exponentiellement vers 0. □

Leçons concernées

15 Différentiabilité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

20 Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'tudes qualitatives de solutions

21 Équations différentielles linéaires. Exemples

Références

J. Hubbard et B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, 1999.

F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.