DÉVELOPPEMENT 22

MÉTHODE DE NEWTON POUR LES POLYNÔMES

On considère un polynôme
$$P(x) = (x-\xi_1)^{m_1} \cdots (x-\xi_r)^{m_r}$$
où $\xi_1 < \cdots < \xi_r$ sont des réels et les m_i sont des entiers non nuls. On pose
$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}.$$

Proposition. — *Si $x_0 > \xi_r$ alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ décroît strictement et converge vers ξ_r.*

Démonstration. — Pour tout x, on a
$$\frac{P'(x)}{P(x)} = (\log|P(x)|)' = \left(\sum_{i=1}^{r} m_i \log|(x-\xi_i)|\right)' = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-\xi_i}$$
d'où pour tout $n \geq 0$
$$x_{n+1} = x_n - \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x_n-\xi_i}\right)^{-1}.$$
En particulier, si $x_n > \xi_r$ alors $x_{n+1} < x_n$. La fonction f définie par $f(x) = x - \dfrac{P(x)}{P'(x)}$ se prolonge par continuité à $[\xi_r, +\infty[$ en posant $f(\xi_r) = \xi_r$ et sa dérivée est donnée par
$$f'(x) = 1 - \frac{(P'(x))^2 - P(x)P''(x)}{(P'(x))^2} = \frac{P(x)P''(x)}{(P'(x))^2}.$$
Mais d'après le théorème de Gauss-Lucas, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de celles de P donc sont dans $[\xi_1, \xi_r]$ et de même pour les racines de P''. Puisque P est unitaire, P, P' et P'' sont strictement positifs sur $[\xi_r, +\infty[$ donc $f' > 0$ et il s'ensuit que f est strictement croissante. Le fait que $\xi_r < x_n$ implique donc que $\xi_r = f(\xi_r) < f(x_n) = x_{n+1}$. La condition $x_0 > \xi_r$ implique donc par récurrence que $x_n > \xi_r$ pour tout $n \geq 0$ et que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ décroît strictement. Enfin, comme cette suite est minorée par ξ_r, elle converge vers un élément qui annule $\frac{P}{P'}$ *i.e.* vers ξ_r. □

Proposition. — *Si $m_r = 1$ alors pour tout $c > 0$, on a $|x_n - \xi_r| = o(c^n)$.*

Démonstration. — Comme $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-\xi_i}$, on a en dérivant
$$\frac{P''(x)(x)P(x) - (P'(x))^2}{(P(x))^2} = -\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x-\xi_i)^2}$$
i.e.
$$\frac{P''(x)(x)P(x)}{(P(x))^2} = \frac{(P'(x))^2}{(P(x))^2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x-\xi_i)^2}$$

d'où

$$f'(x) = \frac{P(x)P''(x)}{(P'(x))^2} = \frac{P(x)P''(x)}{(P(x))^2}\frac{(P(x))^2}{(P'(x))^2} = 1 - \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-\xi_i}\right)^{-2} \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x-\xi_i)^2}$$

d'où $\lim\limits_{x\to\xi_r} f'(x) = 1 - \dfrac{1}{m_r}$.

Si $m_r = 1$ alors $f'(\xi_r) = 0$ mais la formule de Taylor-Lagrange donne $y_n \in]\xi_r, x_n[$ tel que

$$x_{n+1} - \xi_r = f(x_n) - f(\xi_r) = (x_n - \xi_r) f'(y_n).$$

Soit $c > 0$, comme x_n tend vers ξ_r, il existe un rang n_0 à partir duquel $|f'(y_n)| < c$ d'où

$$|x_{n+1} - \xi_r| \leq c\,|x_n - \xi_r|$$

puis pour tout $n \geq n_0$

$$|x_n - \xi_r| \leq c^{n-n_0}\,|x_{n_0} - \xi_r| = O(c^n)$$

et quitte à prendre $0 < d < c$, il vient $|x_n - \xi_r| = o(d^n)$. □

Proposition. — *Si $m_r \geq 2$ alors il existe $c > 0$ tel que $|x_n - \xi_r| \sim c\left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n$.*

Démonstration. — Comme plus haut, on a $f'(\xi_r) = 1 - \frac{1}{m_r}$ et la formule de Taylor-Lagrange donne $y_n \in]\xi_r, x_n[$ tel que $x_{n+1} - \xi_r = (x_n - \xi_r) f'(y_n)$ d'où

$$\log(x_{n+1} - \xi_r) - \log(x_n - \xi_r) = \log f'(y_n)$$

qui converge vers $\log f'(\xi_r)$ quand n tend vers l'infini donc, d'après le théorème de Cesáro, $\log(x_n - \xi_r)$ est équivalent à $n \log f'(\xi_r)$ quand n tend vers l'infini ; en particulier, pour tout $1 > d > f'(\xi_r)$, on a $|x_n - \xi_r| = O(d^n)$. D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $z_n \in]\xi_r, x_n[$ tel que

$$x_{n+1} - \xi_r = f'(\xi_r)(x_n - \xi_r) + \frac{f''(z_n)}{2}(x_n - \xi_r)^2$$

d'où

$$\varepsilon_n = \frac{x_{n+1} - \xi_r}{f'(\xi_r)(x_n - \xi_r)} - 1 = O(x_n - \xi_r)$$

et il s'ensuit que la série de terme général

$$\log(x_{n+1} - \xi_r) - \log(x_n - \xi_r) - \log f'(\xi_r) = \log(1 + \varepsilon_n) = O(d^n)$$

converge. Par conséquent, $\log(x_n - \xi_r) - n \log f'(\xi_r)$ converge vers un réel λ donc $x_n - \xi_r \simeq e^{\lambda} f'(\xi_r)^n$ quand n tend vers l'infini. □

Leçons concernées

15 Différentiabilité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

18 Application des formules de Taylor et des développements limits

23 Convergence des suites numériques. Exemples et applications

24a Comportement asymptotique des suites numériques. Exemples

24b Rapidité de convergence d'un suite. Exemples

25 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples

27 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples

28 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

31 Méthodes d'approximation des solutions d'une quation $F(x) = 0$. Exemples

Sébastien Pellerin

Complément

Localisation des racines de P'. —
Le théorème de Gauss-Lucas affirme que les racines de P' sont dans (l'intérieur de) l'enveloppe convexe des racines (dans $\mathbb{C}$) de P. En effet, écrivons $P = (X-\xi_1)^{m_1}\cdots(X-\xi_r)^{m_r}$ alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X-\xi_i}.$$

Soit ζ une racine de P'. S'il s'agit aussi d'une racine de P alors le résultat est clair, sinon on a

$$\sum_{i=1}^{r} m_i \frac{\overline{\zeta}-\overline{\xi_i}}{|\zeta-\xi_i|^2} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{\zeta-\xi_i} = 0$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{r} m_i \frac{\zeta-\xi_i}{|\zeta-\xi_i|^2} = 0 \quad \textit{i.e.} \quad \zeta \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{|\zeta-\xi_i|^2} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{|\zeta-\xi_i|^2}\xi_i.$$

Dans le cas où les racines sont toutes réelles, le résultat s'obtient aussi en remarquant que chaque ξ_i est une racine de P' de multiplicité $m_i - 1$ et en appliquant le théorème de Rolle sur chaque intervalle $]\xi_i, \xi_{i+1}[$, on obtient $r-1$ autres racines et on a bien $n-1$ racines, toutes comprises entre ξ_1 et ξ_r.

Pour trouver les autres racines. —
Tout d'abord, pour trouver un $x_0 > \xi_r$, on commence par écrire $P = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}$ alors, si $P(\xi) = 0$, on a $|\xi|^n = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \xi^{n-i}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|\,|\xi|^{n-i}$ et si $|\xi| \geq 1$, on a donc $|\xi| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$. D'où

$$|\xi_r| \leq \max\left(1; \sum_{i=1}^{n} |a_i|\right).$$

Par ailleurs, il est conseillé de diviser P par le pgcd de P et P' de sorte que ξ_r soit une racine simple ce qui donne une convergence plus rapide. Pour trouver les autres racines, on applique la méthode de Newton à $\frac{P(x)}{x-\xi_r}$ *i.e.* on considère la suite définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n) - \frac{P(x_n)}{x_n - \xi_r}}.$$

Référence

A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 2*, Dunod, 1999.