DÉVELOPPEMENT 24

THÉORÈME DE REPRÉSENTATION CONFORME

Théorème. — *Si Ω est un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$, distinct de $\mathbb{C}$, alors il existe un biholomorphisme $f : \Omega \to \Delta$ (où Δ est le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$).*

Restriction du problème. —
Soit $z_0 \in \Omega$ et $a \in \mathbb{C}\backslash\Omega$. Puisque l'application $z \mapsto z-a$ est holomorphe sur Ω et puisque Ω est simplement connexe, il existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $e^{g(z)} = z - a$ pour tout $z \in \Omega$; cette fonction g est clairement injective. Le théorème de l'application ouverte montre qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{D(g(z_0), \varepsilon)} \subset g(\Omega)$ donc $D(g(z_0) + 2i\pi, \varepsilon) \cap g(\Omega) = \emptyset$ et il s'ensuit que $|g(z) - (g(z_0) + 2i\pi)| > \varepsilon$. Donc la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{g(z) - g(z_0) - 2i\pi}$$

est holomorphe, injective et bornée sur Ω. Par conséquent, il existe un biholomorphisme de Ω sur un ouvert borné de $\mathbb{C}$. Quitte à composer par une translation puis une homothétie, on peut donc supposer que $\Omega \subset \Delta$ et que Ω contient 0. $\square$

Existence d'une "bonne" dilatation. —
On note :
– $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions holomorphes injectives $f : \Omega \to \Delta$ telles que $f(0) = 0$,
– $\mathcal{B}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{A}$ telles que $|f'(0)| \geq 1$.
Puisque $\mathcal{B}$ contient l'identité, $\mathcal{B}$ n'est pas vide. De plus, il s'agit d'un ensemble borné de $\mathcal{H}(\Omega)$ puisque $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \Omega$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{B}$ tendant vers une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pour tout n, on a $f_n(0) = 0$ et $|f_n'(0)| \geq 1$ d'où $f(0) = 0$ et $|f'(0)| \geq 1$; en particulier f n'est pas constante. Pour tout $z \in \Delta$, on a $|f_n(z)| < 1$ donc $|f(z)| \leq 1$ mais si $|f(z)| = 1$ pour $z \in \Delta$ alors le principe du maximum montre que f est constante ; il s'ensuit que $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \Delta$. Enfin, d'après le théorème de Hurwitz, le fait que les f_n soient injectives implique que f est injective. Finalement, on a $f \in \mathcal{B}$ *i.e.* $\mathcal{B}$ est fermé. D'après le théorème de Montel, $\mathcal{B}$ est un compact de $\mathcal{H}(\Omega)$. Puisque l'application $\Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}, g \mapsto |g'(0)|$ est continue, il existe $f \in \mathcal{B}$ tel que $\Phi(f)$ soit maximal. Alors $|f'(0)|$ est *a fortiori* maximal parmi les $|g'(0)|$ tels que $g \in \mathcal{A}$. $\square$

Conclusion. — Supposons que f ne soit pas surjective alors il existe $a \in \Delta$ tel que $a \notin f(\Omega)$. Puisque Ω est simplement connexe, il existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que pour $z \in \Omega$

$$e^{F(z)} = \frac{f(z) - a}{1 - \overline{a} f(z)}.$$

Puisque $\zeta \mapsto \frac{\zeta - a}{1 - \overline{a}\zeta}$ est un biholomorphisme du disque et puisque f est à valeurs dans Δ, l'application F est une fonction holomorphe de Ω dans le demi-plan $\{\zeta ; \mathrm{Re}\,\zeta < 0\}$ qui est injective. On pose alors pour tout $z \in \Omega$

$$g(z) = \frac{F(z) - F(0)}{F(z) + \overline{F(0)}}.$$

Alors g est une fonction holomorphe et injective dans Ω vérifiant $g(0) = 0$. De plus, on a $|g(z)| < 1$ pour tout $z \in \Omega$ puisque $\left|\frac{v-u}{v+\overline{u}}\right| < 1$ pour tous $u, v \in \mathbb{C}$ de partie réelle < 0. Donc $g \in \mathcal{A}$.

Enfin, on a $g'(0) = \frac{F'(0)}{F(0)+\overline{F(0)}}$ or $F'(0) = (\overline{a} - \frac{1}{a})f'(0)$ d'où

$$\left|g'(0)\right| = \frac{1 - a\overline{a}}{2\,|a| \log\left|\frac{1}{a}\right|} \left|f'(0)\right| > \left|f'(0)\right|$$

puisque $\frac{1-t^2}{t} - 2\log\frac{1}{t} > 0$ pour tout $0 < t < 1$. □

Leçons concernées

03 Utilisation de la notion de compacité
04 Connexité. Exemples et applications
19 Problèmes d'extremum
44 Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications
45 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$

Compléments

Les calculs...—
• Soit $u, v \in \mathbb{C}$ avec Re $u < 0$ et Re $v < 0$, alors

$$\left|\frac{v-u}{v+\overline{u}}\right| < 1 \iff |v-u|^2 < |v+\overline{u}|^2 \iff (v-u)(\overline{v}-\overline{u}) < (v+\overline{u})(\overline{v}+u)$$

mais $(v+\overline{u})(\overline{v}+u) - (v-u)(\overline{v}-\overline{u}) = vu + \overline{uv} + v\overline{u} + u\overline{v} = 4\mathrm{Re}\,(u)\mathrm{Re}\,(v)$ d'où

$$\left|\frac{v-u}{v+\overline{u}}\right| < 1 \iff \mathrm{Re}\,(u)\mathrm{Re}\,(v) > 0$$

ce qui est assuré par le fait que Re u et Re v sont de même signe.
• On a $g(z) = \frac{F(z)-F(0)}{F(z)+\overline{F(0)}}$ d'où

$$g'(z) = \frac{F'(z)(F(z)+\overline{F(0)}) - F'(z)(F(z)-F(0))}{(F(z)+\overline{F(0)})^2} = \frac{F'(z)(F(0)+\overline{F(0)})}{(F(z)+\overline{F(0)})^2}$$

donc

$$g'(0) = \frac{F'(0)(F(0)+\overline{F(0)})}{(F(0)+\overline{F(0)})^2} = \frac{F'(0)}{F(0)+\overline{F(0)}}.$$

D'autre part, on a $e^{F(z)} = \frac{f(z)-a}{1-\overline{a}f(z)}$ d'où

$$F'(z)e^{F(z)} = \frac{f'(z)(1-\overline{a}f(z)) + \overline{a}f'(z)(f(z)-a)}{(1-\overline{a}f(z))^2}$$

i.e.

$$F'(z) = \frac{f'(z)(1-a\overline{a})}{(f(z)-a)(1-\overline{a}f(z))}$$

donc puisque $f(0) = 0$

$$F'(0) = \frac{f'(0)(1-a\overline{a})}{(f(0)-a)(1-\overline{a}f(0))} = -f'(0)(\frac{1}{a} - \overline{a}).$$

On a donc

$$g'(0) = \frac{F'(0)}{F(0)+\overline{F(0)}} = \frac{\overline{a}-\frac{1}{a}}{2\mathrm{Re}\;F(0)}f'(0)$$

or Re $F(0) = $ Re $(\log(-a)) = \log|a| = -\log\frac{1}{|a|}$ d'où

$$g'(0) = \frac{\frac{1}{a}-\overline{a}}{2\log\frac{1}{|a|}}f'(0) = \frac{1-|a|^2}{2a\log\frac{1}{|a|}}f'(0)$$

donc
$$\left|g'(0)\right| = \frac{1-|a|^2}{2\,|a|\log\frac{1}{|a|}}\left|f'(0)\right|.$$

• Posons $\varphi(t) = \frac{1-t^2}{t} - 2\log\frac{1}{t}$ alors $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} - 1 - 2\frac{-1/t^2}{1/t} = -\left(1+\frac{1}{t}\right)^2 < 0$ *i.e.* φ décroît sur $]0,1[$ mais $\varphi(1) = 0$ donc $\varphi(t) > 0$ pour tout $0 < t < 1$.

Biholomorphismes du disque. —

Proposition. — *Si $f : \Delta \to \Delta$ est un biholomorphisme alors il existe $a \in \Delta$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que*
$$f(z) = e^{i\theta} g_a(z) \text{ où } g_a(z) = \frac{z-a}{\overline{a}z-1}.$$

Démonstration. — Montrons tout d'abord que g_a est un biholomorphisme du disque. On a
$$\left|\frac{z-a}{\overline{a}z-1}\right| < 1 \iff |z-a|^2 < |\overline{a}z-1|^2 \iff (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) < (\overline{a}z-1)(a\overline{z}-1)$$
i.e.
$$\left|\frac{z-a}{\overline{a}z-1}\right| < 1 \iff z\overline{z} - a\overline{z} - z\overline{a} + a\overline{a} < \overline{a}za\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + 1 \iff z\overline{z} + a\overline{a} < \overline{a}za\overline{z} + 1$$
donc
$$\left|\frac{z-a}{\overline{a}z-1}\right| < 1 \iff z\overline{z} - \overline{a}za\overline{z} < 1 - a\overline{a} \iff z\overline{z}(1-a\overline{a}) < 1 - a\overline{a} \iff z\overline{z} < 1.$$
Donc g_a est à valeurs dans Δ. D'autre part, on a
$$\omega = \frac{z-a}{\overline{a}z-1} \iff \overline{a}z\omega - \omega = z - a \iff z(1-\overline{a}\omega) = a - \omega \iff z = \frac{\omega-a}{\overline{a}\omega-1}$$
i.e. $g_a \circ g_a = \mathrm{Id}_\Delta$ et il s'ensuit que $g_a \in \mathrm{Aut}(\Delta)$.

Soit $f : \Delta \to \Delta$ un biholomorphisme, on note $a = f^{-1}(0)$ et $h = f \circ g_a$ alors h est un biholomorphisme (comme composée de biholomorphismes) et vérifie $h(0) = 0$. D'après le lemme de Schwarz, on a donc $|h(z)| \leq |z|$ et $\left|h^{-1}(z)\right| \leq |z|$ pour tout $z \in \Delta$; en particulier, il s'ensuit que $|h'(0)| \leq 1$ et $\left|(h^{-1})'(0)\right| \leq 1$. Or on a $h \circ h^{-1} = \mathrm{Id}_\Delta$ donc $h'(h^{-1}(0))(h^{-1})'(0) = 1$ *i.e.* $h'(0)(h^{-1})'(0) = 1$ d'où $|h'(0)|\left|(h^{-1})'(0)\right| = 1$. Il s'ensuit que $|h'(0)| = 1$ donc, toujours d'après le lemme de Schwarz, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $h(z) = e^{i\theta}z$ pour tout $z \in \Delta$. Donc $f(z) = f \circ g_a(g_a(z)) = h(g_a(z)) = e^{i\theta}g_a(z)$. □

Existence d'une détermination du Log sur un domaine simplement connexe. —

Proposition. — *Si Ω est simplement connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ne s'annule pas alors il existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f(z) = e^{g(z)}$ pour tout $z \in \Omega$.*

Démonstration. — Soit $z_0 \in \Omega$, puisque Ω est simplement connexe, il est cohérent de définir une fonction holomorphe g en posant pour tout $z \in \Omega$
$$g(z) = \int_{[z_0,z]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta.$$
Alors
$$\frac{d}{dz}\left(f(z)e^{-g(z)}\right) = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)g'(z)e^{-g(z)} = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)\frac{f'(z)}{f(z)}e^{-g(z)} = 0$$
donc il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $f(z)e^{-g(z)} = e^c$ pour tout $z \in \Omega$ *i.e.* $f(z) = e^{g(z)+c}$ pour tout $z \in \Omega$. □

Sur l'unicité du biholomorphisme. —

Théorème. — *Si $\Omega \neq \mathbb{C}$ est simplement connexe alors il y a unicité du biholomorphisme $f : \Omega \to \Delta$ tel que $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$.*

Démonstration. — Si f et g sont deux tels biholomorphismes alors $h = f \circ g^{-1}$ est un biholomorphisme de Δ sur Δ donc il existe $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $h(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ pour tout $z \in \Delta$. Mais on a $h(0) = 0$ donc $e^{i\theta} \frac{-a}{-1} = 0$ *i.e.* $a = 0$ donc $h(z) = -e^{i\theta} z$ pour tout $z \in \Delta$. Enfin, on a $h'(z) = f'(g^{-1}(z))(g^{-1})'(z)$ donc $h'(0) = f'(g^{-1}(0))(g^{-1})'(0) = \frac{f'(0)}{g'(0)}$ *i.e.* $-e^{i\theta} > 0$ donc $\theta = \pi$ et on a finalement $h(z) = z$ pour tout $z \in \Delta$, d'où $f = g$. □

Sur le problème d'extremum. —
On a vu que si $\Omega \subset \Delta$ est simplement connexe et si $f : \Omega \to \Delta$ est holomorphe injective avec $f(0) = 0$ et telle que $|f'(0)|$ soit maximal parmi les fonctions de ce type, alors f est surjective ; la réciproque est aussi vraie. Considérons un biholomorphisme $g : \Omega \to \Delta$ et une fonction $f : \Omega \to \Delta$ holomorphe avec $g(0) = f(0) = 0$, on pose $h = g^{-1} \circ f$ alors $h(0) = 0$ donc, d'après le lemme de Schwarz, on a $|h'(0)| \leq 1$ pour tout $z \in \Delta$. Or $h'(0) = (g^{-1})'(f(0))f'(0) = \frac{f'(0)}{g'(0)}$ d'où $|f'(0)| \leq |g'(0)|$.

Les biholomorphismes de $\mathbb{C}$. —
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un biholomorphisme alors $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est de rayon de convergence infini donc la fonction h définie pour $z \neq 0$ par $h(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{z^n}$ est holomorphe sur $\Delta \setminus \{0\}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $z_0 \in \Delta$ tels que $D(z_0, \rho) \cap D(0, \varepsilon) = \emptyset$. D'après le théorème de l'application ouverte, $h(D(z_0, \rho))$ est un ouvert non vide de l'image de h or h est injective (comme composée de fonctions injectives) donc $h(D(0, \varepsilon) \setminus \{0\})$ ne peut pas être dense dans $\mathbb{C}$ *i.e.* d'après le théorème de Casorati-Weierstrass, h n'a pas une singularité essentielle en 0. Donc on a $a_n = 0$ pour n assez grand *i.e.* f est un polynôme. Puisque f est injective, il s'agit d'un polynôme de degré exactement 1 *i.e.* il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Les biholomorphismes du disque sur le carré. —
Soit f un biholomorphisme de Δ sur le carré unité C qui fixe 0. On note r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et on pose $g = f^{-1} \circ r \circ f$ alors $g(\Delta) \subset \Delta$ puisque le carré est invariant par cette rotation. De plus $g(0) = 0$ et un calcul rapide donne $g'(0) = (f^{-1})'(0) r'(0) f'(0) = i$, le lemme de Schwarz donne donc $g(z) = iz$ pour tout $z \in \Delta$. On a donc $f(iz) = if(z)$ pour tout $z \in \Delta$.

Référence

H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1985.

Sébastien Pellerin