# DÉVELOPPEMENT 28

# THÉORÈME TAUBÉRIEN FORT

**Théorème taubérien d'Hardy-Littlewood.** — *Si $(a_n)_n$ est une suite réelle avec $a_n = O(\frac{1}{n})$, telle que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $\geq 1$ et que sa somme vérifie $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = \ell$ alors la série $\sum a_n$ converge et sa somme vaut $\ell$.*

*Démonstration.* — Quitte à considérer la suite $(b_n)_n$ définie par $b_0 = a_0 - \ell$ et $b_n = a_n$ pour tout $n \geq 1$, on peut supposer que $\ell = 0$. On considère alors l'ensemble $\Theta$ des applications $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\sum_{n\geq 0} a_n \theta(x^n) \text{ converge pour } \ 0 \leq x < 1 \ \text{ et } \ \lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 0} a_n \theta(x^n) = 0.$$

L'hypothèse sur la série $\sum a_n x^n$ assure que les polynômes sont dans $\Theta$.

• On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = 0$ pour $0 \leq t < \frac{1}{2}$ et par $g(t) = 1$ pour $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Si $0 \leq x < 1$ alors on a $0 \leq x^n < \frac{1}{2}$ dès que $n > -\frac{\log 2}{\log x}$ et il s'ensuit en notant $N_x$ la partie entière de $-\frac{\log 2}{\log x}$ que : $\forall 0 \leq x < 1$ , $\sum\limits_{n\geq 0} a_n g(x^n) = \sum\limits_{n=0}^{N_x} a_n$.
Si on montre que $g \in \Theta$ alors on aura bien la convergence de $\sum a_n$.

• On définit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $h(0) = -1$, $h(1) = 1$ et

$$h(t) = \frac{g(t) - t}{t(1-t)} \ \text{ pour } \ 0 < t < 1 \ \textit{i.e.}\ h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t-1} & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{t} & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on considère $s_1$ et $s_2$ continues telles que $s_1 \leq h \leq s_2$ et $\displaystyle\int_0^1 (s_2(t) - s_1(t))dt < \varepsilon$ alors, d'après le théorème de Weierstrass, il existe $t_1$ et $t_2$ polynômiales sur $[0,1]$ telles que $|t_1 - s_1| < \varepsilon$ et $|t_2 - s_2| < \varepsilon$. Si on pose $u_1 = t_1 - \varepsilon$ et $u_2 = t_2 - \varepsilon$, on a alors $u_1 < s_1 \leq h \leq s_2 < u_2$ et

$$\int_0^1 (u_2(x) - u_1(x))dx \leq \int_0^1 (t_2(x) - t_1(x) + 2\varepsilon)dx \leq \int_0^1 (s_2(x) - s_1(x) + 4\varepsilon)dx < 5\varepsilon.$$

Les polynômes $p_1(x) = x + x(1-x)u_1(x)$ et $p_2(x) = x + x(1-x)u_2(x)$ vérifient $p_i(0) = 0$, $p_i(1) = 1$ et $p_1 \leq g \leq p_2$ ; il s'ensuit que le polynôme

$$q(x) = \frac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)} = u_2(x) - u_1(x) \ \text{ vérifie } \ \int_0^1 q(x)dx < 5\varepsilon.$$

• On a $g(x^n) = 0$ dès que $x^n < \frac{1}{2}$, donc la série $\sum a_n g(x^n)$ converge pour tout $x \in [0,1[$. Puisque $a_n = O(\frac{1}{n})$, il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq \frac{M}{n}$ pour tout $n$, donc on a pour tout $x \in [0,1[$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n)\right| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,(p_2 - p_1)(x^n) \\ &\leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n} q(x^n) \\ &\leq M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n)\end{aligned}$$

*i.e.*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n)\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n)\right| + M(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n).$$

Comme $p_1 \in \Theta$, il existe $0 < \lambda < 1$ tel que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n) < \varepsilon$ donc

$$\forall x \in [\lambda, 1[, \quad \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n)\right| \leq \varepsilon + M(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n).$$

• Il suffit donc, pour conclure, de montrer que pour tout polynôme $f$, on a

$$(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n f(x^n) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \int_0^1 f(t)dt$$

et, par linéarité, on peut se limiter au cas où $f(t) = x^k$. Dans ce cas, on a pour tout $x \in [0,1[$

$$(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n f(x^n) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} (x^{k+1})^n = \frac{1-x}{1-x^{k+1}}$$

*i.e.*

$$(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n f(x^n) = \frac{1}{1+x+\cdots+x^k} \xrightarrow[x \to 1^-]{} \frac{1}{k+1}$$

et on a bien le résultat souhaité puisque $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k dt.$ □

**Leçons concernées**

- 07 Prolongements de fonctions. Applications
- 23 Convergence des suites numériques. Exemples et applications
- 24a Comportement asymptotique des suites numériques. Exemples
- 27 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle.Exemples et contre-exemples
- 29 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples
- 34 Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications
- 40 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples
- 47 Exemples de problèmes d'interversion de limites
- 48 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales ou polynômiales par morceaux. Exemples

**Compléments**

**Un exercice classique. —**

**Proposition**. — *Si $(u_n)_n$ est une suite positive décroissante telle que $\sum u_n$ converge alors $u_n = o(\frac{1}{n})$.*

*Démonstration.* — Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\sum u_n$ converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n < \varepsilon$ et comme la suite $(u_n)_n$ est décroissante, on a pour tout $p > N$

$$(p-N)u_p \leq u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_p \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n < \varepsilon.$$

Si $p > 2N$ alors $\frac{p}{2} < p - N$ donc $\frac{p}{2}u_p \leq \varepsilon$ *i.e.* $pu_p \leq 2\varepsilon$ et on obtient $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} pu_p = 0$. □

**Le théorème taubérien faible. —**

**Proposition**. — *Si $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence 1 telle que $a_n = o(\frac{1}{n})$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = S$ existe alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n = S$.*

*Démonstration.* — Pour tout $N \geq 0$, on pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n$ alors pour tout $x \in ]0,1[$ et tout $N \geq 0$, on a

$$S_N - f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

or on a pour $0 < x < 1$

$$1 - x^n = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) \leq n(1-x)$$

d'où

$$|S_N - f(x)| \leq \sum_{n=0}^{N} n\,|a_n|\,(1-x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n}{N}\,|a_n|\,x^n.$$

Puisque la suite $(ka_k)_k$ tend vers 0, on peut en considérer un majorant $M$, on obtient

$$|S_N - f(x)| \leq NM(1-x) + \frac{1}{N}\sup_{n>N} n\,|a_n| \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \leq NM(1-x) + \frac{1}{N(1-x)}\sup_{n>N} n\,|a_n|\,.$$

Soit $0 < \varepsilon < 1$, d'après ce qui précède, on a

$$\left|S_N - f(1-\frac{\varepsilon}{N})\right| \leq M\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\sup_{n>N} n\,|a_n|$$

or la suite $(ka_k)_k$ tend vers 0 donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sup_{n>N_0} n\,|a_n| < \varepsilon^2$ d'où

$$\forall N \geq N_0\ ,\ \left|S_N - f(1-\frac{\varepsilon}{N})\right| \leq (M+1)\varepsilon.$$

Puisque $f(x)$ tend vers $S$ lorsque $x$ tend vers $1^-$, il existe $N_1 \geq N_0$ tel que

$$\forall N \geq N_1\ ,\ \left|S - f(1-\frac{\varepsilon}{N})\right| \leq \varepsilon$$

d'où

$$\forall N \geq N_1\ ,\ |S - S_N| \leq \left|S - f(1-\frac{\varepsilon}{N})\right| + \left|S_N - f(1-\frac{\varepsilon}{N})\right| \leq (M+2)\varepsilon$$

*i.e.* $S_N$ tend vers $S$ quand $N$ tend vers l'infini. □

**Le théorème d'Abel non tangentiel. —**

**Proposition**. — *Si* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *est une série entière de rayon de convergence* $\geq 1$ *telle que* $\sum a_n$ *converge. Pour* $0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, *on considère le secteur*

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| < 1 \ et \ \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \ / \ z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$$

*alors* $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n$.

*Démonstration.* — On note $S = \sum_{n\geq 0} a_n$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, on effectue la transformation d'Abel $a_n = R_{n-1} - R_n$, alors

$$f(z) - S = \sum_{n\geq 1} a_n(z^n - 1) = \sum_{n\geq 1}(R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) = \sum_{n\geq 0} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n\geq 1} R_n(z^n - 1)$$

donc

$$f(z) - S = (z - 1)\sum_{n\geq 0} R_n z^n.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, on a

$$|f(z) - S| \leq |z - 1| \left|\sum_{n=0}^{N} R_n z^n\right| + \varepsilon\,|z - 1| \sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \leq |z - 1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \frac{|z - 1|}{1 - |z|}$$

et il existe $\alpha > 0$ tel que pour $|z - 1| < \alpha$ on ait $|z - 1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \varepsilon$ *i.e.* pour $|z - 1| < \alpha$ et $|z| < 1$, on a

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{|z - 1|}{1 - |z|}\right).$$

Si $z \in \Delta_{\theta_0}$ alors $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ donc $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2$, d'où (puisque $|z| < 1$)

$$\frac{|z - 1|}{1 - |z|} = \frac{|z - 1|\,(1 + |z|)}{1 - |z|^2} \leq \frac{2\,|z - 1|}{1 - |z|^2} = \frac{2\rho}{2\rho\cos\theta - \rho^2} = \frac{2}{2\cos\theta - \rho}$$

et pour $\rho \leq \cos\theta_0$ il vient

$$\frac{|z - 1|}{1 - |z|} \leq \frac{2}{2\cos\theta_0 - \cos\theta_0} = \frac{2}{\cos\theta_0}.$$

Ainsi, si $z \in \Delta_{\theta_0}$ et si $|z - 1| < \inf\{\alpha, \cos\theta_0\}$, on a

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos\theta_0}\right)$$

donc $f(z)$ tend vers $S = \sum_{n\geq 0} a_n$ quand $z$ tend vers $1^-$. □

**Exemples**. — On considère la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ alors

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \lim_{x\to 1^-} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

On considère la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ alors

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \lim_{x\to 1^-} \log(1 + x) = \log 2.$$

**Remarque**. — Soit $(a_n)_n$ une suite de $\mathbb{C}$ et soit $(b_n)_n$ une suite d'applications d'un ensemble $T$ dans $\mathbb{C}$. Si $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et s'il existe $c > 0$ avec

$$\sup_{t\in T} \sum_{n\geq 1} |b_n(t) - b_{n-1}(t)| \leq c \quad \text{et} \quad \sup_{n,t} |b_n(t)| \leq c$$

alors $\sum_{n\geq 0} a_n b_n(t)$ converge uniformément sur $T$.

En effet, posons $r_n = \sum_{j\geq n} a_j$, $S_n(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j b_j(t)$ et $\rho_n = \sup_{m\geq n} |r_m|$, alors pour $q > p \geq 0$ on a

$$S_q(t) - S_p(t) = \sum_{j=p+1}^{q} a_j b_j(t) = \sum_{j=p+1}^{q} (r_j - r_{j+1}) b_j(t) = \sum_{j=p+1}^{q} r_j b_j(t) - \sum_{j=p+2}^{q+1} r_j b_{j-1}(t)$$

*i.e.*

$$S_q(t) - S_p(t) = \sum_{j=p+2}^{q} r_j (b_j(t) - b_{j-1}(t)) + r_{p+1} b_{p+1}(t) - r_{q+1} b_q(t)$$

d'où

$$|S_q(t) - S_p(t)| \leq \sum_{j=p+2}^{q} \rho_p |b_j(t) - b_{j-1}(t)| + \rho_p |b_{p+1}(t)| + \rho_p |b_q(t)| \leq 3c\rho_p$$

et il s'ensuit que pour $q > p \geq 0$ on a

$$\sup_{t\in T} |S_q(t) - S_p(t)| \leq 3c\rho_p$$

et comme $\rho_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, on a bien la convergence uniforme des $S_n$.

On en déduit une preuve rapide du théorème non tangentiel d'Abel. On pose $b_n(z) = z^n$ sur le secteur $T$ et on considère $z = 1 - re^{i\theta}$. Si $r = 0$ alors $b_n(z) = 1 = b_{n-1}(z)$ donc $\sum_{n\geq 1} |b_n(t) - b_{n-1}(t)| = 0$. Si $r > 0$ alors (en choisissant $r \leq \rho < 2\cos\theta_0$)

$$\sum_{n\geq 1} |b_n(t) - b_{n-1}(t)| = \sum_{n\geq 0} |z|^n |1 - z| \leq \frac{2|1-z|}{1 - |z|^2} \leq \frac{2}{2\cos\theta_0 - \rho}$$

alors $c = \frac{2}{2\cos\theta_0 - \rho} \geq 1$ vérifie aussi $|b_n(z)| \leq 1 \leq c$ pour $z \in T$. Donc la série converge uniformément sur le secteur. Notons en particulier que la série converge uniformément sur $[0, 1]$.

**Application**. — Pour tout $0 < t < 2\pi$, on a $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}$.

La série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nt}{n} z^n$ est de rayon 1 et converge en 1. Pour $0 \leq r < 1$ et $u \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_r(u) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nt}{n} r^n \quad \text{et} \quad g_r(u) = \arctan \frac{r\sin u}{1 - r\cos u}$$

alors

$$f_r'(u) = \operatorname{Re} \frac{re^{iu}}{1 - re^{iu}} = \frac{r\cos u - r^2}{1 - 2r\cos u + r^2} = g_r'(u)$$

or $f_r(0) = g_r(0)$ donc $f_r(u) = g_r(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. D'après le théorème d'Abel, on a donc

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nt}{n} = \lim_{r\to 1^-} \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nt}{n} r^n = \lim_{r\to 1^-} \arctan \frac{r\sin t}{1 - r\cos t} = \arctan \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

or $\frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2})$ et $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi - t}{2} < \frac{\pi}{2}$ donc

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nt}{n} = \arctan\tan \frac{\pi - t}{2} = \frac{\pi - t}{2}.$$

**Un autre théorème taubérien. —**

**Proposition**. — *Soit* $(a_n)_n$ *une suite décroissante de réels positifs,* $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ *et* $0 < \alpha < 1$ *alors*

$$a_n \sim \frac{1}{n^\alpha} \iff S_n \sim \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}.$$

*Démonstration.* — Le sens direct est facile. Réciproquement, posons $\ell = \liminf n^\alpha a_n$ et $L = \limsup n^\alpha a_n$, on considère $\delta > 1$ et $m = [n\delta]$ alors la décroissance de $(a_n)_n$ donne

$$S_m - S_n = a_{n+1} + \cdots + a_m \leq (m-n)a_n \leq (\delta - 1)na_n$$

d'où pour tout $n \geq 1$

$$n^\alpha a_n \geq \frac{1}{\delta - 1} n^{\alpha-1}(S_m - S_n) \geq \frac{1}{\delta-1}\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\alpha-1} m^{\alpha-1}S_m - n^{\alpha-1}S_n\right].$$

Puisque $m \sim n\delta$ on a

$$\ell = \liminf n^\alpha a_n \geq \frac{1}{\delta-1}\left[\delta^{\alpha-1}\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right] = \frac{1}{1-\alpha}\frac{\delta^{\alpha-1}-1}{\delta-1}$$

d'où

$$\ell \geq \lim_{\delta\to 1^+} \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha) = 1.$$

On considère maintenant $0 < \delta < 1$ et $m = [n\delta]$ alors

$$S_n - S_m = a_{m+1} + \cdots + a_n \leq (n-m)a_n$$

d'où pour tout $n \geq 1$

$$n^\alpha a_n \leq \frac{1}{1-\frac{m}{n}}\left[n^{\alpha-1}S_n - m^{\alpha-1}S_m\left(\frac{n}{m}\right)^{\alpha-1}\right]$$

d'où

$$L = \limsup n^\alpha a_n \leq \frac{1}{1-\delta}\left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\delta^{1-\alpha}\right] = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1-\delta^{1-\alpha}}{1-\delta}$$

puis

$$L \leq \lim_{\delta\to 1^+} \frac{1}{1-\alpha}\frac{1-\delta^{1-\alpha}}{1-\delta} = \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha) = 1.$$

On a donc $\limsup n^\alpha a_n \leq 1 \leq \liminf n^\alpha a_n$ *i.e.* $a_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$. □

**Remarque**. — L'hypothèse de décroissance de la suite $(a_n)_n$ est indispensable pour la seconde partie ; il suffit par exemple de poser $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ si $n \geq 2$ est pair et $a_n = 0$ sinon.

## Références

X. Gourdon, *Les maths en tête. Analyse*, Ellipses, 1994.

C. Zuily et H. Queffélec, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson, 1995.

Sébastien Pellerin