DÉVELOPPEMENT 30

FONCTIONS À VARIATION BORNÉE

Pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, on note $sub([a,b])$ l'ensemble des subdivisions σ de $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Si σ est une telle subdivision alors, pour toute application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on note

$$var_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|\,.$$

S'il existe $M > 0$ telle que $var_\sigma(f) \leq M$ pour toute subdivision σ de $[a,b]$ alors on dit que f est *à variation bornée* et on note

$$V(f,a,b) = \sup_{\sigma \in sub([a,b])} var_\sigma(f).$$

On suppose dans le lemme suivant que f est à variation bornée sur $[a,b]$.

Lemme. — *Si $[c,d] \subset [a,b]$ alors $f_{|[c,d]}$ est à variation bornée et on note*

$$V(f,c,d) = \sup_{\sigma \in sub([c,d])} var_\sigma(f_{|[c,d]}).$$

De plus, si $a \leq x < y < z \leq b$, alors $V(f,x,y) + V(f,y,z) = V(f,x,z)$.

Démonstration. — Si $\sigma : c = x_0 < x_1 \cdots < x_n = d$ est une subdivision de $[c,d]$ alors

$$\sigma' : a \leq x_0 < x_1 \cdots < x_n \leq b$$

est une subdivision de $[a,b]$ et il vient

$$var_\sigma(f_{[c,d]}) \leq var_{\sigma'}(f) \leq M$$

et cette majoration est valable pour tout $\sigma \in sub([c,d])$ donc $f_{|[c,d]}$ est à variation bornée.

Soit $\sigma_1 : x = x_0 < x_1 \cdots < x_p = y$ une subdivision de $[x,y]$ et $\sigma_2 : y = y_0 < y_1 \cdots < y_q = z$ est une subdivision de $[y,z]$ alors, on obtient naturellement une subdivision σ de $[x,z]$ en concaténant σ_1 et σ_2, d'où

$$var_{\sigma)_1}(f) + var_{\sigma_2}(f) = var_\sigma(f) \leq V(f,x,z)$$

et cette majoration est valable pour tout $\sigma_1 \in sub([x,y])$ et pour tout $\sigma_2 \in sub([y,z])$ donc

$$V(f,x,y) + V(f,y,z) \leq V(f,x,z).$$

Réciproquement, si σ est une subdivision de $[x,z]$ alors, quitte à ajouter le point y, on a naturellement une subdivision σ' de $[x,z]$ vérifiant $var_\sigma(f) \leq var_{\sigma'}(f)$. Si σ' est de la forme $x = x_0 < x_1 \cdots < x_p = y < y_1 < \cdots < y_q = z$, on note $\sigma_1 : x = x_0 < x_1 \cdots < x_p = y$ et $\sigma_2 : y = y_0 < y_1 < \cdots < y_q = z$ de sorte que

$$var_\sigma(f) \leq var_{\sigma'}(f) = var_{\sigma_1}(f) + var_{\sigma_2}(f) \leq V(f,x,y) + V(f,y,z)$$

or cette inégalité est vraie pour toute subdivision σ de $[x,z]$ donc $V(f,x,z) \leq V(f,x,y) + V(f,y,z)$. $\square$

Proposition. — *Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors g est à variation bornée et*

$$V(g,a,b) = \int_a^b \left|g'(t)\right| dt.$$

Démonstration. — Soit $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ alors, pour tout k, on a

$$|g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} g'(t)dt\right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|g'(t)\right| dt$$

d'où $var_\sigma(g) = \sum_{k=0}^{n} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|g'(t)\right| dt = \int_a^b \left|g'(t)\right| dt$ et cette relation est vraie pour toute subdivision σ de $[a,b]$ donc g est à variation bornée et $V(g,a,b) \leq \int_a^b \left|g'(t)\right| dt.$

Soit $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ alors le théorème des accroissements finis permet d'écrire $g(x_{k+1}) - g(x_k) = (x_{k+1} - x_k)g'(\theta_k)$, avec $x_k < \theta_k < x_{k+1}$, de sorte que

$$var_\sigma(g) = \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \left|g'(\theta_k)\right|.$$

Cette dernière expression est une somme de Riemann pour la fonction $|g'|$, relativement à la subdivision σ pointée aux θ_k, donc $var_\sigma(g) \xrightarrow[|\sigma|\to 0]{} \int_a^b \left|g'(t)\right| dt$ où $|\sigma|$ représente le pas de la subdivision σ, d'où $V(g,a,b) \geq \int_a^b \left|g'(t)\right| dt.$ □

Proposition. — *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement s'il existe $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ croissantes telles que $f = g - h$.*

Démonstration. — Si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est croissante alors, pour toute subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$, on a

$$var_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a)$$

donc φ est à variation bornée. Puisque la différence de deux fonctions à variation bornée est aussi à variation bornée, on obtient la condition suffisante.

Réciproquement, on considère l'application $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = V(f,a,x)$. Le deuxième lemme assure que la fonction g est croissante. On pose $h = g - f$ alors, pour $x < y$, on a

$$h(y) - h(x) = g(y) - g(x) - (f(y) - f(x)) = V(f,x,y) - (f(y) - f(x)) \geq 0$$

(car $x < y$ est une partition de $[x,y]$) donc h est croissante et $f = g - h$ est bien la différence de deux fonctions croissantes. □

Exemple. — La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ est continue mais n'est pas à variation bornée.

Démonstration. — On considère la subdivision suivante de $[0,1]$:

$$\sigma_n \ : \ 0 < \frac{1}{n\pi} < \frac{1}{(n-1)\pi} < \cdots < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1$$

alors

$$Var_{\sigma_n}(f) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \left| f\left(\frac{1}{(k+1)\pi}\right) - f\left(\frac{1}{k\pi}\right)\right| \sum_{k=1}^{n-1} \left|\frac{\cos(k+1)\pi}{(k+1)\pi} - \frac{\cos k\pi}{k\pi}\right|$$

donc
$$Var_{\sigma_n}(f) \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right| \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{k+1}$$
or la série $\sum \frac{1}{k+1}$ diverge donc f n'est pas à variation bornée. $\square$

Leçons concernées

18 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
32 Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables

Référence

X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.