Méthodes de projection pour les équations intégrales

Gabriel Peyré

Définition 0.1. Méthode de projection On se donne X et Y deux espaces de *Banach* , ainsi que $A : X \to Y$ un opérateur borné injectif. Pour $f \in A(X) \subset Y$, on cherche à approximer la solution du problème :

$$\text{trouver } \varphi \in X \text{ tel que } A\varphi = f \tag{1}$$

Pour se faire, on se donne une suite de sous espaces vectoriels $X_n \subset X$ et $Y_n \subset Y$ de dimension finie n, ainsi que des projecteurs $P_n : Y \to Y_n$. On considère alors le problème approché :

$$\text{trouver } \varphi_n \in X_n \text{ tel que } P_n A\varphi_n = P_n f \tag{2}$$

Cette méthode de projection est dite convergente s'il existe un rang n_0 à partir duquel pour tout $f \in A(X)$, l'équation approchée (2) admet une unique solution $\varphi_n \in X_n$, et que cette solution converge vers la solution φ de (1), ie. $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$.

Remarque. Cette condition de convergence peut s'exprimer plus simplement en fonction de l'opérateur $A_n = P_n A : X_n \to Y_n$. Elle signifie simplement qu'à partir d'un certain rang, cet opérateur est inversible (ie que le système linéaire obtenu est inversible), et que de plus, on a une convergence ponctuelle :

$$A_n^{-1}(P_n f) = A_n^{-1}(P_n(A\varphi)) = (P_n A)^{-1} P_n A\varphi \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$$

Il faut bien sûr garder à l'esprit que l'opérateur A_n est défini sur X_n alors que l'opérateur composé $P_n A$ est défini sur X tout entier. Ainsi, l'opérateur $(P_n A)^{-1} P_n A$ n'est pas l'identité (c'est justement notre but : approcher l'identité à l'aide de cet opérateur), il faut tenir compte des ensembles de départ et d'arrivée !

Théorème 0.1. Banach-Steinhaus *Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs* bornés $A_n : X \to Y$ *entre deux espaces de Banach X et Y. On suppose que la suite est bornée ponctuellement, ie que pour tout $\varphi \in X$, il existe une constante C_φ telle que $\|A_n\varphi\|_Y \leq C_\varphi$. Alors, la suite est bornée uniformément en norme, ie il existe une constante C telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \|A_n\| \leq C$.*

Corollaire 0.2. Continuité d'une limite ponctuelle *Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs* bornés $A_n : X \to Y$ *entre deux espaces de Banach X et Y. On suppose que cette suite converge ponctuellement vers un opérateur $A : X \to Y$, ie que $\forall \varphi \in X,\ A_n\varphi \xrightarrow[n\to\infty]{} A\varphi$. Alors l'opérateur A est à son tour borné.*

Proposition 0.3. Compacité et convergence uniforme *Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs* bornés $A_n : X \to Y$ *entre un espace normé X et un espace de Banach Y. On suppose que la suite converge ponctuellement vers un opérateur $A : X \to Y$ (à son tour borné grâce au corollaire 0.2). Alors, la convergence est uniforme en norme sur tout ensemble compact $U \subset X$, ie :*

$$\sup_{\varphi\in U} \|A_n\varphi - A\varphi\|_Y \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Proposition 0.4. Convergence ponctuelle et convergence en norme *On considère une suite $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs bornés $L_n : Y \to Z$, avec Z un espace normé et Y un espace de Banach. On suppose de plus que cette suite converge ponctuellement vers un opérateur $L : Y \to Z$ (lui aussi borné). On se donne aussi un opérateur compact borné $A : X \to Y$, où X est un espace vectoriel normé quelconque. Alors on a convergence en norme de la suite d'opérateurs bornés compacts $L_nA : X \to Z$ vers l'opérateur LA, ie :*

$$\|(L_n - L)A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Remarque. Dans la suite, on se place dans le cadre où les espaces X_n sur lesquels on projette possèdent la propriété de densité en norme, ie :

$$\forall\varphi \in X,\ \inf_{\psi\in X_n} \|\psi - \varphi\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{3}$$

ce qui est bien sûr une condition nécessaire pour espérer pouvoir construire des méthodes convergentes (et qui n'est pas loin d'être suffisante, comme le montre le résultat suivant).

Théorème 0.5. CNS de convergence des méthodes de projection *On se place dans le cadre de densité décrit par (3). Une méthode de projection pour un opérateur $A : X \to Y$ entre deux espaces de Banach X et Y converge* ***si et seulement si*** *il existe un rang n_0 à partir duquel les opérateurs de dimension finie $P_nA_n : X_n \to Y_n$ sont inversibles et si les opérateurs d'approximation $(P_nA)^{-1}P_nA : X \to X_n$ sont uniformément bornés, i.e. :*

$$\exists M > 0,\ \forall n \geq n_0,\ \|(P_nA)^{-1}P_nA\| \leq M \tag{4}$$

Dans ce cas, on a une estimation de l'erreur commise en approchant $\varphi \in X$ par la solution approchée $\varphi_n = (P_nA)^{-1}P_nA\varphi$:

$$\|\varphi - \varphi_n\|_X \leq (1 + M) \inf_{\psi\in X_n} \|\psi - \varphi\| \tag{5}$$

Remarque. Dans la suite, on considère un opérateur compact $A : X \to X$ sur un espace de *Banach* X, tel que $I - A$ soit injectif, et l'on cherche à résoudre l'équation de *Fredholm*, pour $f \in Im(A) = A(X)$:

$$\text{trouver } \varphi \in X \text{tel que } \varphi - A\varphi = f \tag{6}$$

Pour approcher la solution, on n'a besoin que d'une suite X_n d'espaces de dimension finie n, ainsi que de projecteurs $P_n : X \to X_n$, ce qui conduit à la résolution de l'équation en dimension finie :

$$\text{trouver } \varphi_n \in X_n \text{tel que } \varphi_n - P_nA\varphi_n = P_nf \tag{7}$$

Si l'on suppose $I - A$ injectif et $f \in (I - A)(X)$, c'est ce que l'on appellera une méthode de projection pour $I - A$.

Théorème 0.6. Convergence pour les équations de Fredholm du second type *On suppose que $A : X \to X$ est borné compact sur X un espace de Banach, et tel que $I - A$ soit injectif. On suppose de plus que les projecteurs P_n convergent ponctuellement, ie que $\forall\varphi \in X$, $P_n\varphi \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$. Alors la méthode de projection pour $I - A$ détaillée en (7) converge.*

Référence : [**?**, p.100]
Utilisation : (***,4) (**,5) (*,1)
Mots clefs : dimension finie, espaces complets, opérateurs compacts, méthodes de quadrature, approximation, projection.

200	Espaces de fonctions. Exemples et applications.	***
204	Espaces complets. Exemples et applications.	***
209	Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés : exemples et applications.	***
210	Utilisation de la dimension finie en analyse.	***
202	Utilisation de la notion de compacité.	**
230	Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.	**
234	Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.	**
236	Méthodes de calcul des valeurs approchées d'une intégrale.	**
247	Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.	**
208	Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.	*