Représentation conforme et fluides incompressibles

Gabriel Peyré

On note $w(x,y) = u(x,y) + \imath v(x,y)$ le champ de vitesses d'un fluide défini sur un domaine $G \subset \mathbb{C}$ (par exemple dont le bord est $\mathcal{C}^1$ par morceaux). On suppose qu'il est :

- *Incompressible :* pour toute courbe $\mathcal{C} \subset G$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a $\int_{\mathcal{C}} w(x,y)_\tau ds = \int_{\mathcal{C}} udx + vdy = 0$, où l'on a noté $w_\tau = \langle w, \tau(s) \rangle$, avec $\tau = (\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})$ le vecteur tangent.
- *Irrotationnel :* pour toute courbe $\mathcal{C} \subset G$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a $\int_{\mathcal{C}} w(x,y)_\nu ds = \int_{\mathcal{C}} -vdx + udy = 0$, où l'on a noté $w_\nu = \langle w, \nu(s) \rangle$, avec $\nu = (\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds})$ le vecteur normal.

Par un théorème de calcul différentiel (cf. théorème 0.3), la nullité de ces deux intégrales curvilignes implique que $\overrightarrow{grad}(w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ et $\overrightarrow{rot}(w) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Les formules de Riemann montrent que la fonction $u - \imath v$ est holomorphe, et que les fonctions u et $-v$ sont des fonctions harmoniques conjuguées. On peut ainsi énoncer le résultat :

Proposition 0.1. POTENTIEL DE FLOT *On suppose le flot défini sur un domaine $D \subset G$ simplement connexe. On peut alors construire une primitive f de $u - \imath v$, ie. $f'(z) = u - \imath v$. Si on note $f(z) = \varphi(x,y) + \imath\psi(x,y)$, on a :*

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \imath \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\imath \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - \imath v$$

D'où :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

De façon réciproque, la donnée d'un tel potentiel f défini un flot incompressible et irrotationnel.

Définition 0.1. POTENTIEL DE FLOT ET DE VITESSE On remarque que $\Delta\varphi$ est colinéaire à la vitesse du fluide, et que $\Delta\psi$ est orthogonal à la vitesse. D'où les appellations :

- Potentiel de vitesse pour φ : les lignes $\{\varphi = cste\}$ sont les lignes équipotentielles.
- Potentiel de flot pour ψ : les lignes $\{\psi = cste\}$ sont les lignes de flot (trajectoires du fluide).

Les lignes de flot et les lignes de vitesses forment deux familles de courbes orthogonales (sauf éventuellement aux points où le potentiel s'annule).

Remarque. CONTRAINTES PHYSIQUES Pour que le fluide soit physiquement réaliste, il faut que les vitesses sur le bord du domaine D soient tangentes aux parois, ce qui signifie que les parois ∂D soient des lignes de flot $\{\psi = cste\}$.

Exemple 0.2. FLOT DANS UN COIN Si on considère le flot donné par le potentiel $f(z) = z^2$, on a $\varphi(x,y) = x^2 - y^2$, $\psi(x,y) = 2xy$. Les lignes de flot et les lignes de vitesse forment deux familles orthogonales d'hyperboles équilatères. On constate que ce flot modélise de façon physiquement réaliste un flot dans un quart de plan.

Exemple 0.3. FLOT PASSANT UN CYLINDRE Si on considère le flot donné par le potentiel $f(z) = z^2$, on a $\varphi(x,y) = x^2 - y^2$, $\psi(x,y) = 2xy$. Les lignes de flot et les lignes de vitesse forment deux familles orthogonales d'hyperboles équilatères. Pour calculer un flot passant le disque $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, on utilise la transformation de Joukowski $\lambda : z \mapsto \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z})$. On va montrer (cf. remarque), que c'est une application bi-holomorphe de U

sur V^c, où $V = \{x + \imath y;\ y = 0, -1 \leq x \leq 1\}$. Or, il est facile de déterminer un flot physiquement correct sur V^c, en prenant simplement pour ligne de flot les droites $Im(z) = cste$, ce qui conduit à considérer le potentiel $f_1(z) = z$. Donc le potentiel sur U va être donné par $f(z) = f_1(\lambda(z))$. Donc au final, les lignes de flot sont les courbes $\mathcal{C}_t : Im(f(x, y)) = y - \frac{y}{x^2+y^2} = 2t$, et on vérifie bien que $\mathcal{C}_0$ contient la paroi du disque.

Remarque. Fonction de Joukowski Pour montrer que la fonction λ est bien une transformation bi-holomorphe de U sur V^c (cf. [**?**, T1 p.197]), on peut regarder l'image des cercles concentriques $\mathcal{C}_r : \{re^{\imath t; 0 \leq t < 2\pi}\}$. Comme $\lambda(re^{\imath t}) = \frac{1}{2}(r + 1/r)\cos(t) + \imath\frac{1}{2}(r - 1/r)\sin(t)$, les $\lambda(\mathcal{C}_r)$ sont des ellipses concentriques qui se referment sur V lorsque $t \to 1$.

Remarque. Formes différentielles Voir [**?**, p.49]. On note $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle, avec $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ continues. On note aussi $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ une courbe, où $\gamma = (x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ On peut alors définir l'intégrale curviligne le long de γ par la formule de changement de variables : $\int_\gamma \omega := \int_a^b \gamma^*(\omega)$ où $\gamma^*(\omega) = f(t)dt$ et $f(t) = P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)$. Cette formule s'étend au cas où γ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Proposition 0.2. Formes exactes *Si $\omega = dF$ avec $F : D \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\int_\gamma \omega = F(b) - F(a)$. On remarque que $\omega = dF$ signifie $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$, ce qui implique les relations fondamentales $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

Proposition 0.3. Formes fermées *Si P et Q admettent des dérivées partielles continues, alors $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ **ssi** ω est fermée (i.e. admet une primitive localement) **ssi** $\int_\gamma \omega = 0$ pour des chemins suffisamment petits.*

Référence : [**?**, p.174][**?**, p.175][**?**, p.326]
Utilisation : (***,3) (**,1) (*,0)
Mots clefs : fonctions holomorphes, fonctions harmoniques, connexité, représentation conforme.

215	Étude locale de courbes et de surfaces.	***
243	Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.	***
244	Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.	***
203	Connexité : exemples et applications	**