Méthodes de Gauss et polynômes orthogonaux

Gabriel Peyré

Définition 0.1. ESPACE FONCTIONNEL Soit $w :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue telle que $\forall n$, $\int_\alpha^\beta |x|^n w(x)dx < \infty$. On considère l'espace vectoriel E des fonctions de module carré intégrable pour le poids $w(x)$, muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_\alpha^\beta f(x)g(x)w(x)dx$$

Théorème 0.1. POLYNÔMES ORTHOGONAUX *Il existe une unique suite $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux pour $\langle .,. \rangle$. De plus, ces polynômes sont donnés par la relation de récurrence :*

$$\begin{array}{l} p_n(x) = (x-\lambda_n)p_{n-1}(x) - \mu_n p_{n-2}(x) \quad \textit{avec :} \\ \lambda_n = \frac{\langle x p_{n-1}, p_{n-1}\rangle}{\|p_{n-1}\|^2} \quad \textit{et :} \\ \mu_n = \frac{\|p_{n-1}\|^2}{\|p_{n-2}\|^2} \end{array}$$

Enfin, p_n a n racines simples distinctes dans $]a, b[$.

Théorème 0.2. MÉTHODE DE GAUSS *On cherche une formule approchée de la forme :*

$$\int_\alpha^\beta f(x)w(x)dx \simeq \sum_{j=0}^{l} \lambda_j f(x_j) \ \textit{pour } x_j \in [\alpha, \beta]$$

Il existe un choix et un seul des points x_j et des poids λ_j de sorte que la méthode soit d'ordre $N = 2l+1$. Les points x_j sont alors les racines du $(l+1)$-ième polynôme orthogonal pour le poids w sur $]\alpha, \beta[$.

Remarque. Les méthodes sont très puissantes à la fois parce qu'elles ont un ordre élevé, mais aussi parcequ'elle intègrent directement un poids w qui peut par exemple présenter des singularités sur le bord de l'intervalle. La seule restriction est de devoir calculer au préalable les racines des polynômes orthogonaux correspondants.

Remarque. EXPLICATION DE LA DÉMARCHE Pour comprendre pourquoi est-ce que l'on est amené à choisir les zéros des polynômes orthogonaux comme points d'interpolation, il faut étudier de plus près la formule d'erreur correspondant à la méthode issue du choix de $N+1$ points d'interpolation : Si on note P_N le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0 < \ldots < x_N$, alors, on peut utiliser les différences divisées définies de la manière suivante :

$$\begin{array}{l} f[x_i] = f(x_i) \\ f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1,\ldots,x_k] - f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k - x_0} \end{array}$$

on a alors une expression du polynôme d'interpolation de *Lagrange* :

$$\begin{array}{l} p_n(x) = \sum_{k=1}^n f[x_0, \ldots, x_k]\pi_k(x) \quad \text{avec :} \\ \pi_k(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_k) \end{array}$$

et surtout un résultat fondamental :

$$f(x) - P_N(x) = f[x_0, \dots, x_N, x]\pi_N(x) \tag{1}$$

En effet, avec le théorème de *Rolle*, ceci permet d'affirmer que :

$$\begin{array}{l} \exists \xi_x \in]\alpha, \beta[,\ f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!}\pi_N(x), \quad \text{d'où} \\ E(f) = \int_\alpha^\beta (f(x) - P_N(x))dx = \frac{1}{(N+1)!}\int_\alpha^\beta f^{(N+1)}(\xi_x)\pi_N(x)dx \end{array}$$

Tout ces calculs permettent, entre autre, de démontrer les vitesses de convergence pour les méthodes de *Newton-Cotes*. Cependant, ils permettent aussi et surtout d'élaborer des méthodes plus performantes par la remarque suivante : si le polynôme π_N est tel que $\int_\alpha^\beta \pi_N(t)dt = 0$, alors, si on introduit un nouveau point de subdivision x_{N+1}, on peut exploiter la formule des différences divisées :

$$f[x_0, \dots, x_N, x] = f[x_0, \dots, x_N, x_{N+1}] + (x - x_{N+1})f[x_0, \dots, x_N, x_{N+1}, x] \tag{2}$$

ce qui permet d'augmenter l'ordre de la méthode, grace à la formule :

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_\alpha^\beta f[x_0, \dots, x_N, x]\pi_N(x)dx \\ &= \int_\alpha^\beta f[x_0, \dots, x_N, x_{N+1}, x]\pi_{N+1}(x)dx \end{aligned}$$

Maintenant, il suffit de remarquer que si l'on a pu choisir le point x_{N+1} tel que $\int_\alpha^\beta \pi_{N+1}(t)dt = 0$, alors on peut recommencer ! Et jusqu'ou peut on aller ? Et bien le choix optimal est celui tel que le polynôme π_N qui correspond aux choix des $N + 1$ premiers points (ceux qui détermine la méthode) soit orthogonaux aux polynômes "ajoutés", ie les $\prod_{i=N+1}^{N+k}(x - x_i)$. Ceci signifie donc que notre polynôme π_N doit être orthogonaux aux plus possible d'espaces E_{N+k} des polynômes de degré inférieur à $n + k$. Donc le choix optimal est celui des polynômes orthogonaux de *Legendre*, qui sont orthogonaux à tous les polynômes de degré inférieur à N. Bien sûr ce raisonnement marche aussi avec des intégrales comportant un poids w, ce qui conduit aux polynômes orthogonaux pour le poids utilisé.

Référence : [**?**, p.50 et 73]
Utilisation : (***,0) (**,1) (*,0)
Mots clefs : polynômes, intégration numérique, vitesse de convergence, algorithmes, singularités, méthodes de quadratures.

135	Polynômes orthogonaux. Applications.	**