Une démonstration du théorème de Brouwer via le lemme de non-rétraction

Ivan Nourdin

9 mars 2001

Mots-clés: point fixe, inversion locale, compacité, calcul d'intégrale, connexité.

Commençons par énoncer le théorème de Brouwer :

Théorème *(de Brouwer)* Si C un ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) et si $f : C \to C$ est une fonction continue, alors f a au moins un point fixe.

Avant de le démontrer, montrons comment l'on peut simplifier ses hypothèses. Tout d'abord, on peut supposer que C est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$:

Lemme Soit C un ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^n$. Notons B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.
Si toute fonction continue $f : B \to B$ admet un point fixe, alors toute fonction continue $g : C \to C$ admet un point fixe.

Preuve. Soit $g : C \to C$ une fonction continue. Soit $\pi : \mathbb{R}^n \to C$ la projection de $\mathbb{R}^n$ sur C qui existe bien et est continue grâce au théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert. C étant compact, il est borné donc contenu dans une boule centrée en 0 et de rayon assez grand. Quitte à composer g par une homothétie, on peut supposer que C est contenu dans B. La fonction $f = g \circ \pi$ est alors continue et applique B sur lui même : elle admet un point fixe x. On a $g \circ \pi(x) = x \in C$. Donc $x = \pi(x)$ et $y = \pi(x)$ est un point fixe de g.$\square$

Ensuite, on peut supposer que f est de classe $\mathcal{C}^1$:

Lemme On note B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.
Si toute fonction $f : B \to B$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ (a fortiori $\mathcal{C}^1$) admet un point fixe, alors toute fonction continue $g : B \to B$ admet un point fixe.

Preuve. Soit $g : B \longrightarrow B$ une fonction continue. Donnons-nous une suite de polynômes (P_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ \|g - P_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}.$$

Pour $n \geq 1$, la fonction polynômiale P_n n'a aucune raison d'appliquer B sur lui même. Par contre, la fonction polynômiale Q_n définie par :

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{1 + \frac{1}{n}}$$

applique bien B sur lui-même et vérifie en outre :

$$\|Q_n - g\|_\infty = \left\|\frac{n}{n+1}P_n - g\right\|_\infty = \frac{n}{n+1}\left\|P_n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)g\right\|_\infty$$

$$\leq \frac{n}{n+1}\left(\|P_n - g\|_\infty + \frac{1}{n}\|g\|_\infty\right) \leq \frac{n}{n+1}\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0.$$

Par hypothèse, il existe une suite (x_n) de B telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ Q_n(x_n) = x_n$$

et vérifiant donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ \|g(x_n) - x_n\| \leq \frac{1}{n+1} \ (*).$$

En extrayant une sous-suite convergente de (x_n) et en passant à la limite dans $(*)$, on obtient un point fixe de g.$\square$

On s'est donc ramené à prouver le :

Théorème *(de Brouwer, version faible)* On note B la boule unité de $\mathbb{R}^n$.
Toute fonction $f : B \longrightarrow B$ de classe $\mathcal{C}^1$ admet au moins un point fixe.

Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat. Nous avons choisi d'exposer celle reposant sur le :

Lemme *(de non-rétraction)* Si l'on note B (resp. S) la boule unité fermée (resp. la sphère unité) de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), alors il n'existe pas de fonction $f : B \longrightarrow S$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f_{|S} = id_S$.

Avant de démontrer ce lemme, montrons comment il permet de conclure.

Preuve de la version faible du théorème de Brouwer. L'idée est toute simple ! Si $f : B \longrightarrow B$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ n'admettant aucun point fixe, on peut construire une fonction $g : B \longrightarrow S$ toujours de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $g_{|S} = id_S$ en procédant comme suit. Si $x \in B$, x et $f(x)$ sont deux points distincts de B. On peut donc considérer l'unique droite $\mathcal{D}_x$ passant par ces deux points qui coupe S en exactement deux points opposés. Si l'on note A_x le point d'intersection le plus près de x, il est facile de voir que la fonction $g : B \longrightarrow B, x \mapsto A_x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (l'écrire avec une formule) et vérifie par construction $g_{|S} = id_S$. Ceci est en contradiction avec le lemme de non rétraction !□

Démonstration du lemme de non-rétraction. Raisonnons par l'absurde et donnons-nous une fonction $f : B \longrightarrow S$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f_{|S} = id_S$.
Si $t \in [0, 1]$, on pose :

$$f_t = tf + (1 - t)id_B,$$

et :

$$k(t) = \int_B \det df_t(x)dx.$$

Il y a plusieurs étapes dans la démonstration.

Première étape. On montre que $k : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction polynômiale. C'est facile car, à x fixé, $t \longrightarrow f_t(x)$ est polynômiale et donc aussi k.

Deuxième étape. On montre que, pour $t \in \left[0, \frac{1}{2(M+1)}\right]$ et pour tout $x \in B$, on a det $df_t(x) > 0$.
Soit $M = \sup_{x \in B} \|df(x)\| < +\infty$. Si $t \in \left[0, \frac{1}{2(M+1)}\right]$, on a :

$$\|df_t - id\| = t\,\|df - id\| \leq t(\|df\| + \|id\|) \leq \frac{1}{2}$$

et df_t est inversible d'où det $df_t \neq 0$. L'application $t \mapsto$ det df_t étant continue et det $df_0 =$ det $id = 1 > 0$, on a alors, grâce au théorème des valeurs intermédiaires :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2M + 1}\right] : \ \det df_t > 0.$$

Troisième étape. On montre que, pour $t \in \left[0, \frac{1}{2(M+1)}\right]$, f_t est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\overset{\circ}{B}$ sur lui-même.

Grâce à un corollaire immédiat du théorème d'inversion locale, il suffit de montrer que, pour $t \in \left[0, \frac{1}{2(M+1)}\right]$, f_t est une bijection de $\overset{\circ}{B}$ sur lui-même. Soit donc $t \in \left[0, \frac{1}{2(M+1)}\right]$.

Commençons par montrer l'injectivité de f_t. Soient $x, y \in \overset{\circ}{B}$ tels que $f_t(x) = f_t(y)$. On a alors, grâce à l'inégalité des accroissements finis :

$$\|x - y\| = \|(f_t(x) - x) - (f_t(y) - y)\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|$$

et $x = y$.

Montrons la surjectivité de f_t. On va utiliser un argument de connexité : on montrera que $f_t(\overset{\circ}{B})$ est à la fois ouvert et fermé dans $\overset{\circ}{B}$. L'ouverture est une simple application du théorème d'inversion locale. La fermeture est moins immédiate. Soit (y_n) une suite de $f_t(\overset{\circ}{B})$ qui converge vers $y \in \overset{\circ}{B}$. Donnons-nous une suite (x_n) de $\overset{\circ}{B}$ vérifiant $y_n = f_t(x_n)$. Extrayons de (x_n) une sous-suite convergeant vers un élément $x \in B$. On a alors $y = f_t(x)$. Reste à voir que $x \in \overset{\circ}{B}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $x \in S$. On a alors $y = f_t(x) = x$ et $y \in S$, ce qui est absurde ! Donc $x \in \overset{\circ}{B}$ et $y = f_t(x) \in f_t(\overset{\circ}{B})$.

Quatrième étape. On montre que k est une fonction constante sur $[0, 1]$.

k étant une fonction polynômiale par la première étape, il suffit de montrer que k est constante sur $\left[0, \frac{1}{2(M+1)}\right]$. C'est vrai grâce à la troisième étape puisque l'on peut alors effectuer le changement de variable $x \longrightarrow f_t(x)$ dans l'intégrale définissant $k(t)$ et obtenir que $k(t)$ est égal au volume Vol(B) de B.

Cinquième étape. On conclut en aboutissant à une absurdité.

Comme k est constante, on a Vol$(B) = k(0) = k(1) = \int_B \det df(x) dx$. Or Im$df$ est inclus dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ comme on le voit en différentiant l'égalité :

$$\forall x \in B : \ \|f(x)\|^2 = 1.$$

Ainsi $k(1) = 0$, c'est absurde !□

Bibliographie

Nicolas Bonnault, Jean-François Burnol et Philippe Roche - Analyse : exercices corrigés posés à l'oral des concours - Dunod, 1987.