

**Etude qualitative au voisinage d'un point singulier des trajectoires  
d'un système différentiel autonome non linéaire dans  $\mathbb{R}^2$ .  
Le cas du système de Lotka-Volterra.**

rédigé par *Gilles Deruelle*

La démarche la plus naturelle pour étudier le comportement des trajectoires d'un système différentiel autonome non linéaire ( $NL$ ) au voisinage d'un point singulier, consiste à se ramener au système linéaire associé ( $L$ ), puis à faire le lien entre les trajectoires des deux systèmes. Ce lien peut paraître "automatique" à première vue, en particulier si l'on se contente de n'examiner que quelques exemples sans complications. Il est pourtant loin de l'être. Ces notes ont simplement pour but de donner un résumé des diverses situations possibles ainsi que quelques références bibliographiques destinées au lecteur souhaitant entrer dans les détails: les démonstrations sont souvent techniques et seuls quelques résultats ou méthodes seront développés dans ces notes.

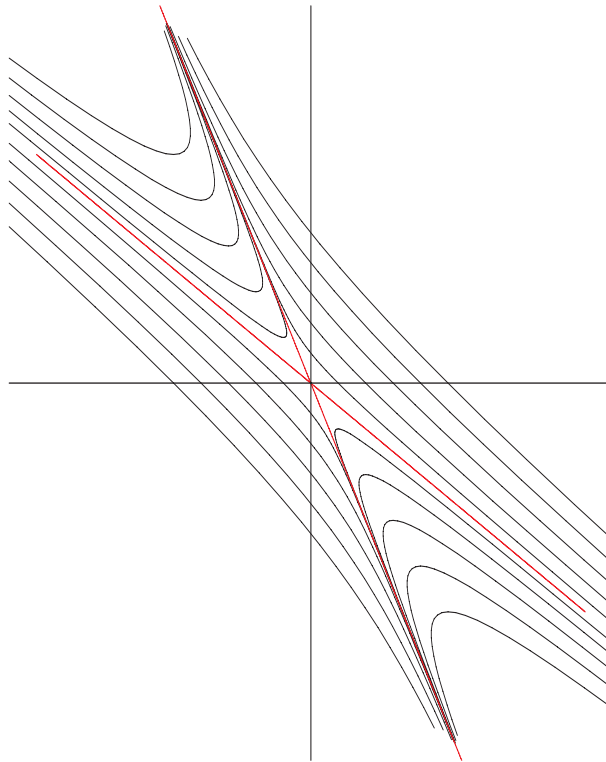
**1. Le cas linéaire: rappel de la classification des trajectoires au voisinage d'un point singulier.**

$$(L) \begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} . \text{ On suppose le système non dégénéré, c'est à dire } ad - bc \neq 0.$$

En conséquence l'origine est le seul point singulier.

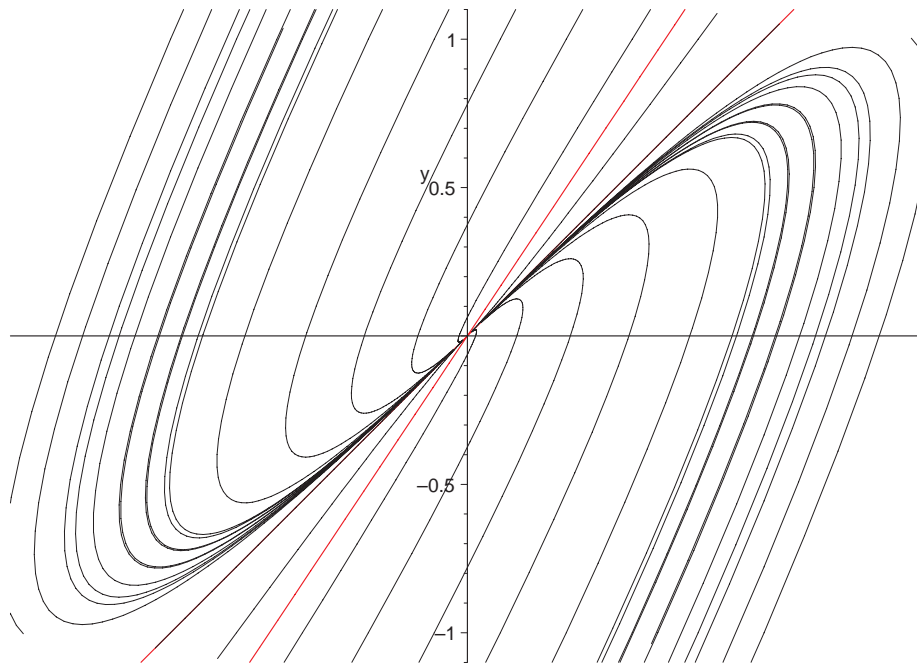
On note  $\lambda$  et  $\mu$  les valeurs propres (réelles ou non) de la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

- Cas 1:  $\lambda, \mu$  réels distincts et  $\lambda, \mu < 0$ . **Point-selle** ( asymptotiquement instable ).



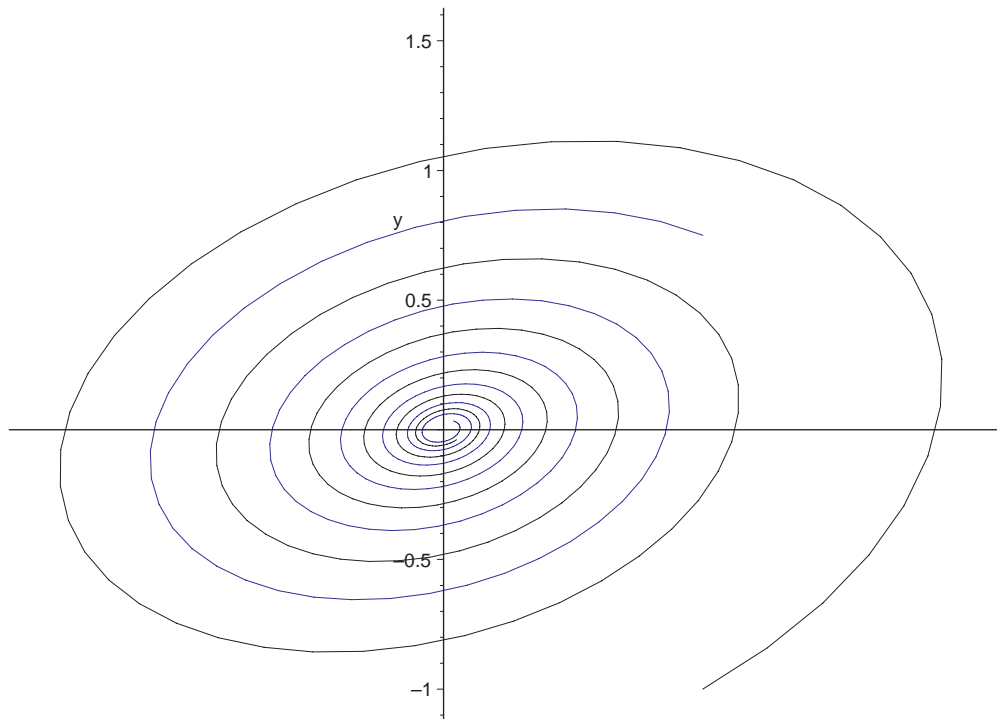
- **Cas 2:**  $\lambda, \mu$  réels distincts et  $\lambda, \mu > 0$ .

**Noeud** (asymptotiquement instable si  $\lambda + \mu > 0$ , asymptotiquement stable si  $\lambda + \mu < 0$ ).  
Toutes les trajectoires (sauf une) ont une direction limite commune "à l'origine".



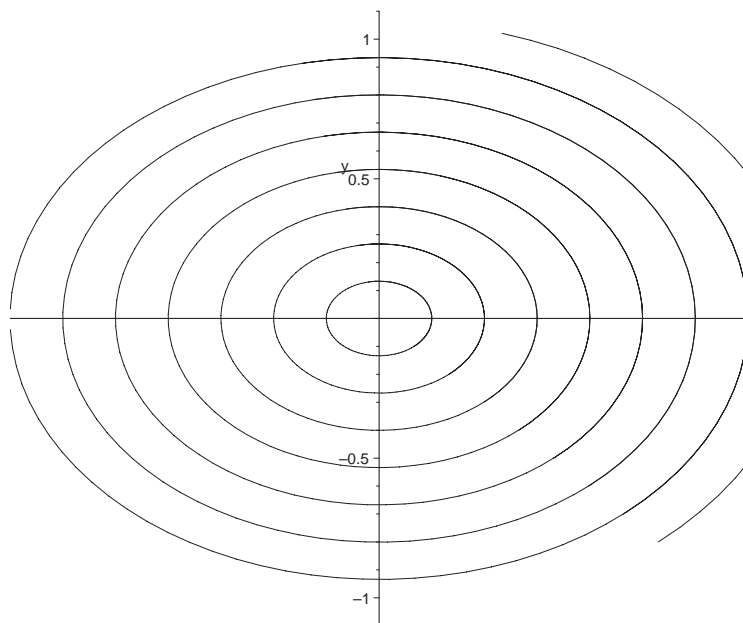
- **Cas 3:**  $\lambda = \alpha + i\beta$  et  $\mu = \bar{\lambda}$  avec  $\alpha, \beta$  réels,  $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0$ .

**Foyer** (asymptotiquement stable - resp. instable - si  $\alpha < 0$  - resp.  $\alpha > 0$ ).



- Cas 4:  $\lambda = i\beta$  et  $\mu = -i\beta$  avec  $\beta \neq 0$ .

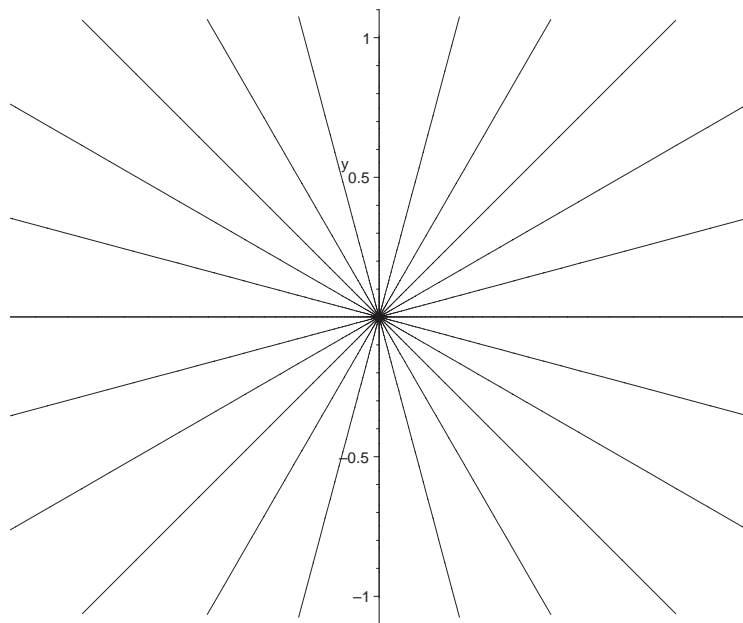
**Centre** ( stable ). Toutes les trajectoires sont fermées (solutions périodiques).



- Cas 5:  $\lambda = \mu \neq 0$  et  $A$  est diagonalisable.

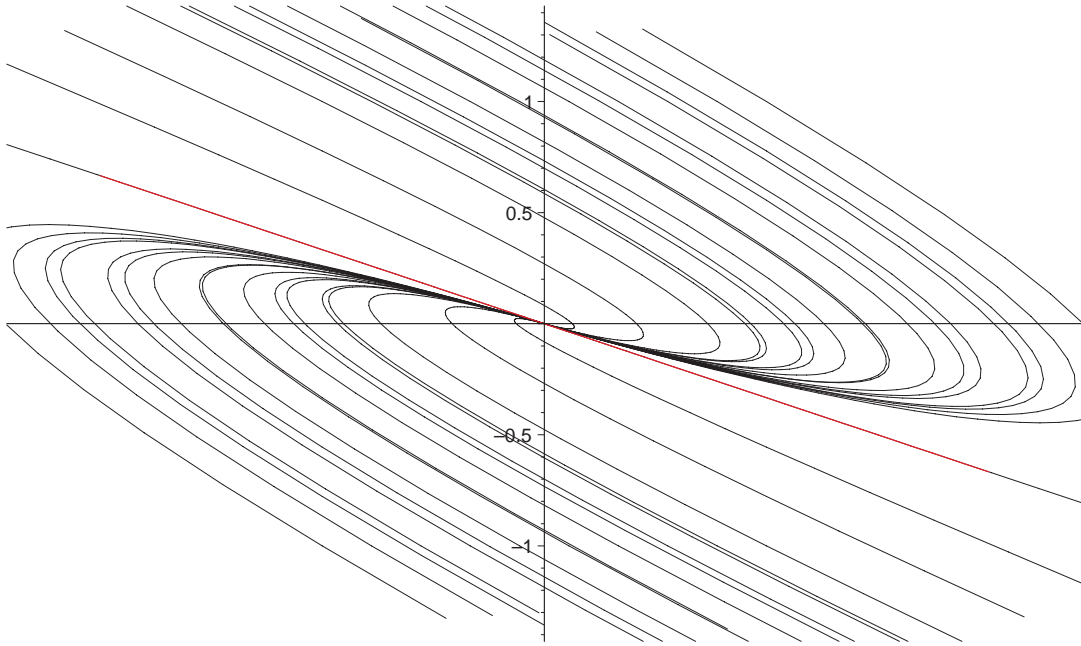
**Noeud étoilé** (asymptotiquement stable - resp. instable - si  $\lambda < 0$  - resp. si  $\lambda > 0$ ).

Quelquesoit la direction donnée, il existe une trajectoire admettant cette direction comme direction limite "à l'origine".



- **Cas 6:**  $\lambda = \mu \neq 0$  et  $A$  n'est pas diagonalisable.

**Noeud dégénéré** (asymptotiquement stable - resp. instable - si  $\lambda < 0$  - resp. si  $\lambda > 0$ )



N.B. : dans [CL], le point singulier est appelé noeud impropre dans les cas 2 et 6, noeud propre dans le cas 5.

## 2. Le cas non linéaire.

On considère le système:

$$(NL) \begin{cases} \dot{x} = ax + by + f(x, y) \\ \dot{y} = cx + dy + g(x, y) \end{cases}$$

où  $ad - bc \neq 0$  et  $f(x, y) = o(\|(x, y)\|)$ ,  $g(x, y) = o(\|(x, y)\|)$ .

On suppose évidemment que  $f$  et  $g$  vérifient des conditions de régularité suffisantes pour pouvoir obtenir les résultats classiques sur la résolution des systèmes différentiels autonomes.

En outre, il est peut-être bon de rappeler trois propriétés essentielles des systèmes autonomes (cf. propriété d'invariance par translation + Th. de *Cauchy-Lipschitz*):

- Par un point régulier passe une et une seule trajectoire.
- Une trajectoire qui se recoupe est une trajectoire fermée (solution périodique).
- une trajectoire issue d'un point régulier ne peut "atteindre" un point singulier en un temps fini.

Des hypothèses on déduit que l'origine est un point singulier isolé de  $(NL)$ . Le but est donc d'étudier les trajectoires au voisinage de l'origine et de les comparer avec celles du système linéaire associé  $(L)$ .

On pourra considérer  $(NL)$  comme une version "légèrement" perturbée de  $(L)$ : en résumé, on étudie l'effet d'une "petite" perturbation - non linéaire - sur un système linéaire.

- (a) **R1** : Dans le cas où  $(0, 0)$  est un point-selle, un foyer ou un noeud autre qu'un noeud étoilé pour  $(L)$ , les trajectoires de  $(NL)$  ont le même comportement au voisinage de  $(0, 0)$  que celles de  $(L)$ .

dem. Traitons par exemple le cas où  $(0, 0)$  est un foyer pour  $(L)$ . Avec les notations du 1. on peut se ramener par un changement linéaire de coordonnées au cas où  $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ , avec  $\lambda = \alpha + i\beta, \mu = \bar{\lambda}$ . On a donc ici  $\beta \neq 0$  et l'on peut supposer sans perte de généralité que  $\beta > 0$  et  $\alpha < 0$ .

En passant en polaires, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r + \cos \theta f(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta g(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \text{et } r\dot{\theta} &= \beta r + \cos \theta g(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

En tenant compte des hypothèses, on peut écrire :  $\begin{cases} \dot{r} = \alpha r + rF(r, \theta) & (1) \\ \dot{\theta} = \beta + G(r, \theta) & (2) \end{cases}$  avec  $F(r, \theta)$

et  $G(r, \theta)$  qui tendent uniformément vers zéro par rapport à  $\theta$  quand  $r$  tend vers zéro.

Soit alors  $R > 0$  tel que :  $\forall \theta, \forall 0 < r \leq R, |F(r, \theta)| \leq \frac{|\alpha|}{2}$  et  $|G(r, \theta)| \leq \frac{\beta}{2}$ .

De (1) on tire :  $\dot{r} \leq -\frac{|\alpha|}{2}r$  dès que  $0 < r \leq R$  et donc  $\dot{r} < 0$ . Toute trajectoire issue du disque  $D(0, R]$  reste dans ce disque. De plus, pour  $0 < r_0 < R, \ln \frac{r_0}{r} \geq \frac{|\alpha|}{2}(t - t_0)$  montre que  $r$  tend vers zéro quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Par ailleurs (2) entraîne :  $\dot{\theta} > 0$  dès que  $0 < r \leq R$ .

En conclusion, la trajectoire est une spirale s'enroulant autour de l'origine qui est bien un foyer.

[ Voir par exemple [CL] – Ch.15 pour les autres cas ].  $\square$

- (b) • Dans le cas où  $(0, 0)$  est un noeud étoilé pour  $(L)$ , les difficultés commencent comme le montre l'exemple:

$$(NL) \begin{cases} \dot{x} = -x + \frac{2y}{\ln(x^2 + y^2)} \\ \dot{y} = -y - \frac{2x}{\ln(x^2 + y^2)} \end{cases}$$

On notera que  $f$  et  $g$  se prolongent à l'origine en une fonction de classe  $C^1$ .

L'origine est un noeud étoilé pour  $(L)$ . Le passage en polaires donne :  $\dot{r} = -r$  et  $\dot{\theta} = -\frac{1}{\ln r}$ .

On obtient :  $r = r_0 e^{-(t-t_0)}$  et  $\theta = \theta_0 + \ln |t_0 - t + \ln r_0| - \ln |\ln r_0|$  qui montrent que l'origine est un foyer pour  $(NL)$ .

- Reprenons le cas général.

La même méthode que dans la démonstration du (a) nous ramène au système en polaires:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\lambda + F(r, \theta)) & (1) \\ \dot{\theta} = rG(r, \theta) & (2) \end{cases} \text{ avec } F \text{ et } G \text{ qui tendent uniformément vers zéro par rapport à } \theta$$

quand  $r$  tend vers zéro.

L'idée est alors de trouver des conditions suffisantes portant sur  $f$  et  $g$  qui valident la démarche (à peine esquissée . . . ) qui suit :

si par exemple  $\lambda < 0$ , on aura  $\dot{r} < 0$  pour  $r$  suffisamment voisin de zéro: toute trajectoire

issue d'un point de  $D(0, R]$  pour  $R$  suffisamment petit, reste dans le disque  $D(0, R]$  quand  $t$  tend vers l'infini. Comme au (a) on montre que  $r$  tend vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini. Le fait que  $r$  soit strictement décroissante, permet de considérer  $t$  comme fonction de  $r$  pour  $t$  assez grand ( $t = \varphi(r)$ ), puis  $\theta$  comme fonction de  $r$  ( $\theta(t) = \theta(\varphi(r)) = \tilde{\theta}(r)$ ).

On obtient alors : 
$$\frac{d\tilde{\theta}}{dr} = \frac{G(r, \tilde{\theta})}{\lambda + F(r, \tilde{\theta})} = H(r, \tilde{\theta}).$$

On est ramené à l'équation intégrale :  $\tilde{\theta}(r) = \theta_0 + \int_0^r H(\rho, \tilde{\theta}(\rho))d\rho$  ( $\theta_0$  quelconque), puis on cherche à vérifier ( si  $H$  est suffisamment "sympathique" ) que  $\tilde{\theta}(r)$  tend vers  $\theta_0$  quand  $r$  tend vers zéro, c'est à dire  $\theta(t)$  tend vers  $\theta_0$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Si tel est le cas, on est en présence d'un noeud étoilé pour  $(NL)$  dans le sens (cf. Cas 5): quelsoit la direction donnée, il existe une trajectoire admettant cette direction comme direction limite "à l'origine".

[CL] donne de telles conditions suffisantes portant sur  $f$  et  $g$  (cf. Chap.15 – Th.3.1 et corollaire) pour que l'origine reste un noeud étoilé pour  $(NL)$ .

Le lecteur pourra également se convaincre que la condition " $f$  et  $g$  analytiques" est aussi suffisante et énoncer ainsi une proposition **R2** étendant le résultat **R1** au cas d'un noeud étoilé, avec bien sûr les hypothèses adéquates .

(c) Le cas où l'origine est un centre pour  $(L)$  est encore plus indécis. Examinons tout d'abord deux exemples.

- –  $(NL) \begin{cases} \dot{x} = -y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = x - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$  L'origine est un centre pour  $(L)$ .

Le désormais classique passage en polaires nous amène au système : 
$$\begin{cases} \dot{r} = -r^2 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

On obtient :  $r = \frac{1}{t - t_0 + \frac{1}{r_0}}$  et  $\theta = t + \theta_0$ . L'origine est un foyer pour  $(NL)$ .

- $(NL) \begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$  L'origine est un centre pour  $(L)$ .

Le passage en polaires donne :  $\dot{r} = r^3 \sin \frac{\pi}{r}$  et  $\dot{\theta} = 1$ .

On obtient une suite de trajectoires fermées  $\Gamma_n$  (solutions périodiques) :  $r = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ .

Toute autre trajectoire vérifie :  $r > 1$  ( $\dot{r} > 0$ ) ,  $r \in ]\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}[$  ( $\dot{r} < 0$ )

ou  $r \in ]\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}[$  ( $\dot{r} > 0$ ) puisque deux trajectoires ne peuvent s'intersecter en un point

régulier ( il s'agit de l'une des caractéristiques des systèmes autonomes ). Pour ces trajectoires  $r$  et  $\theta$  sont strictement monotones.

Chaque  $\Gamma_n$  est en fait *un cycle-limite* : on appellera ainsi toute trajectoire fermée isolée du système. *On montre que, pour un cycle-limite  $\Gamma$ , il existe un voisinage  $U$  de  $\Gamma$  tel que toute trajectoire passant par un point de  $U$  s'enroule en spirale autour de  $\Gamma$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$  ou quand  $t$  tend vers  $-\infty$ .*

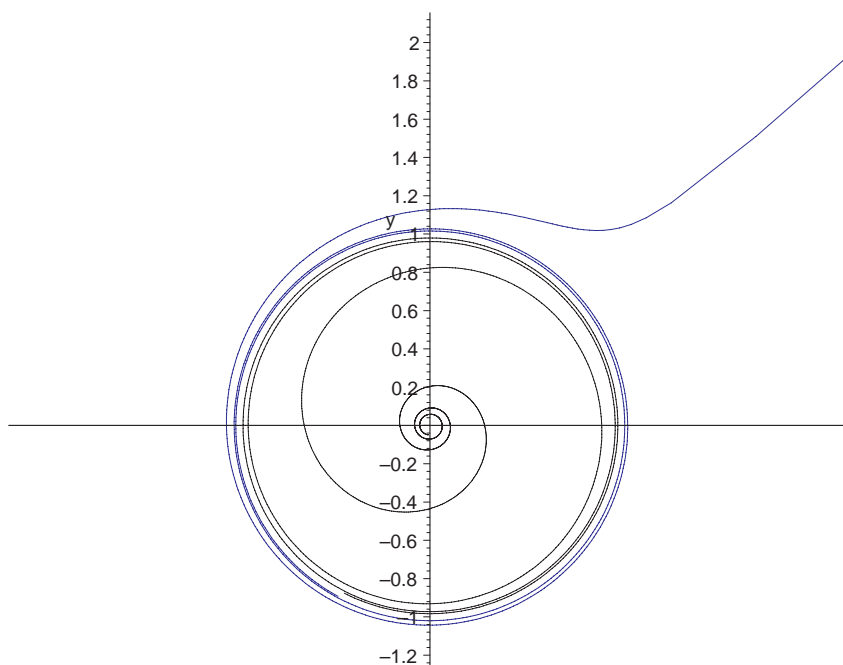
Pour des résultats concernant la notion de cycle-limite ( théorème de Poincaré-Bendixson et applications ) voir [HS] – Chap.11.

La configuration au voisinage de l'origine obtenue dans cet exemple est d'une nature n'ayant pas d'équivalent dans le cas linéaire : on parle de *centre-foyer*.

- Donnons un autre exemple où apparaît un cycle-limite (sans nécessairement se limiter à l'étude locale autour de l'origine).

$$(NL) \begin{cases} \dot{x} = y + x\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 - 1)^2 \\ \dot{y} = -x + y\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 - 1)^2 \end{cases} \quad \text{L'origine est un centre pour } (L).$$

Le passage en polaires donne :  $\dot{r} = r^2(r^2 - 1)^2$  et  $\dot{\theta} = 1$ . Le cercle  $\Gamma$  ( $r = 1$ ) est un cycle-limite. On a pour  $r \neq 1$ ,  $\dot{r} > 0$ . L'origine est un foyer instable. Toute trajectoire issue d'un point du disque  $D(0, 1[$  distinct de l'origine ( $0 < r_0 < 1$ ) s'enroule en spirale ( $t$  tendant vers  $+\infty$ ) à l'intérieur de  $\Gamma$  qui fait office de cercle-asymptote. Toute trajectoire issue d'un point extérieur au disque  $D(0, 1]$  ( $r_0 > 1$ ) s'enroule en spirale autour de  $\Gamma$ , cette fois quand  $t$  tend vers  $-\infty$ .



*On retiendra que l'existence de cycles-limites est un phénomène lié au caractère non linéaire d'un système autonome.*

- Un autre cas possible n'a pas été mis en évidence dans les exemples qui précèdent : celui où l'origine est un centre à la fois pour  $(L)$  et pour  $(NL)$ .  
On a le théorème ( voir par exemple  $[CL] - Ch.15 - Th.4.1$  ) :

**R3** : si l'origine est un centre pour  $(L)$ , c'est soit un foyer, soit un centre-foyer, soit un centre pour  $(NL)$ .

Un exemple classique du troisième cas, pas encore rencontré, est le système de *Lotka-Volterra* qui correspond à l'une des modélisations possibles de l'interaction proies-prédateurs en dynamique des populations.

$$(NL) \begin{cases} \dot{x} = (a - by)x \\ \dot{y} = (cx - d)y \end{cases} \quad \text{où } a, b, c, d > 0.$$

Ce système présente deux singularités : l'origine et le point  $(d/c, a/b)$ .

On étudie les trajectoires dans le quart de plan  $x > 0, y > 0$ .

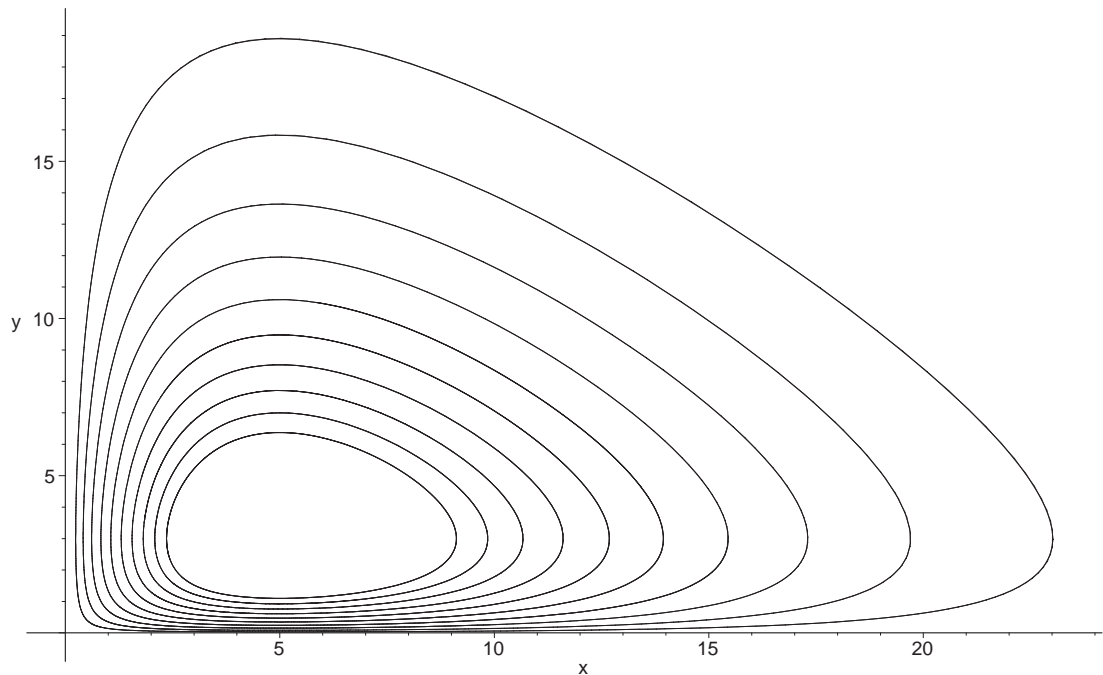
– Il est immédiat de vérifier que l'origine est un point-selle pour  $(NL)$  en utilisant **R1**.

– Par un changement d'origine, on se ramène au système :  $(NL2)$  
$$\begin{cases} \dot{x} = -by(x + \frac{d}{c}) \\ \dot{y} = cx(y + \frac{a}{b}) \end{cases}$$

Les valeurs propres du système linéaire associé  $(L2)$  sont  $\pm i\sqrt{ad}$  et l'origine est un centre pour  $(L2)$ .

Le tracé de quelques trajectoires de  $(NL)$  à l'aide par exemple de Maple, laisse présager que  $S(d/c, a/b)$  est encore un centre pour  $(NL)$  ...

```
> with(DEtools):
> eq1:=diff(x(t),t)=x(t)*(3-y(t));
  eq2:=diff(y(t),t)=y(t)*(-5+x(t));
  inits:=[seq([x(0)=3*(1/8+2*i/25),y(0)=2*(1/8+2*i/25)],i=1..10)];
  toplot:=DEplot([eq1,eq2],[x(t),y(t)],t=0..5,inits,linecolor=BLACK,stepsize=0.01,
                 arrows=NONE,thickness=1);
> with(plots):
  plotsetup(ps,plotoutput='Lotka-Volterra.ps',plotoptions='color,noborder,width=14in');
  display(toplot);
```



Il se trouve qu'en effet  $S$  est aussi un centre pour  $(NL)$  : en fait toute trajectoire telle que  $x(0) = x_0 > 0$  et  $y(0) = y_0 > 0$  reste contenue dans le quart de plan  $x > 0, y > 0$ , pour  $t > 0$  et est une trajectoire fermée.

Ce résultat n'est pas immédiat à démontrer. On va commencer par montrer que le système



de Lotka-Volterra possède une caractéristique qui va se révéler fort utile. Tout d'abord quelques définitions :

- \* un ouvert connexe  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  est dit positivement invariant (relativement à  $(NL)$ ) si toute trajectoire issue d'un point de  $D$  est contenu entièrement dans  $D$  ( $t$  tendant vers  $+\infty$ ).
- \* on appelle intégrale première de  $(NL)$  toute fonction différentiable définie sur un ouvert connexe  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , non constante sur aucun ouvert non vide de  $D$  et constante le long des trajectoires de  $(NL)$ .
- \* Le système  $(NL)$  est dit *conservatif* dans l'ouvert connexe  $D$  si  $D$  est positivement invariant et s'il possède une intégrale première définie dans  $D$ .

Le point intéressant est que si  $(NL)$  est conservatif dans  $D$ , ses trajectoires sont contenues dans les courbes de niveau de l'intégrale première : cela peut permettre bien sûr d'en tirer des renseignements sur l'allure des trajectoires au voisinage d'un point singulier.

Revenons au système de Lotka-Volterra  $(NL2)$  et cherchons une intégrale première dans le quart de plan  $\mathcal{P} : x > -d/c, y > -a/b$ , sous la forme  $H(x, y) = F(x) + G(y)$ .

On doit avoir :  $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = \frac{dF}{dx}\dot{x} + \frac{dG}{dy}\dot{y} = -by(x + d/c)\frac{dF}{dx} + cx(y + a/b)\frac{dF}{dy} = 0$ .

On obtient :

$$\frac{(x + d/c)}{cx} \frac{dF}{dx} = \frac{(y + a/b)}{by} \frac{dG}{dy} = cste,$$

puis

$$\frac{dF}{dx} = K \frac{cx}{x + d/c} \quad \text{et} \quad \frac{dG}{dy} = K \frac{by}{y + a/b}.$$

D'où, pour  $K = 1$  :  $F(x) = cx - d \ln(x + d/c)$ ,  $G(y) = by - a \ln(y + a/b)$

et  $H(x, y) = cx + by - d \ln(x + d/c) - a \ln(y + a/b)$  convient :

$(NL2)$  est un système conservatif dans  $\mathcal{P}$ .

Il nous reste à montrer que les courbes de niveau de  $H$  sont des courbes fermées.

$H$  étant de classe  $C^3$ , une méthode consiste à utiliser le lemme de Morse (ref. [FR]-exercice 105) : si  $D^2H(0, 0)$  est non dégénérée et de valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$ , il existe un voisinage  $\Omega$  de l'origine et deux fonctions  $u, v$  de classe  $C^1$  sur  $\Omega$  tels que

$$\forall (x, y) \in \Omega, H(x, y) - H(0, 0) = \frac{\partial H}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial H}{\partial y}(0, 0)y + \text{sgn}(\lambda_1)u(x, y)^2 + \text{sgn}(\lambda_2)v(x, y)^2$$

avec  $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$  réalisant un  $C^1$ -difféomorphisme  $\varphi$  de  $\Omega$  sur  $\varphi(\Omega)$ .

Dans le cas qui nous occupe,  $\frac{\partial H}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial H}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

Par ailleurs  $D^2H(0, 0) = \begin{pmatrix} c^2/d & 0 \\ 0 & b^2/a \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2 > 0$ .

En conclusion les courbes de niveau de  $H$  sont, au voisinage de l'origine et à un  $C^1$ -difféomorphisme près, des ellipses :

$(0, 0)$  est bien un centre pour  $(NL2)$ .

remarques : (1) le résultat obtenu grâce au lemme de Morse est local.

(2) Cette même méthode laisse présager que les seuls cas possibles au départ étaient, soit un centre ( $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ ), soit un point-selle ( $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ ) ... Ce que l'on va confirmer dans ce qui suit.

• **compléments sur les systèmes conservatifs :**

*Si un système est conservatif dans  $D$ , il ne peut admettre dans  $D$  de singularité qui soit un foyer ou un noeud, ni de cycle-limite. En conséquence, il ne peut admettre comme singularité qu'un point-selle ou un centre.*

On peut donc énoncer grâce à **R3** :

*Si  $(NL)$  est un système conservatif sur  $D$  ( $(0, 0) \in D$ ) admettant l'origine comme point singulier et si l'origine est un centre pour  $(L)$ , alors l'origine est un centre pour  $(NL)$ . C'est précisément la situation du système de Lotka-Volterra au point  $(d/c, a/b)$ .*

dem. L'une des caractéristiques d'un foyer, d'un noeud ou d'un cycle-limite est l'existence d'un voisinage  $U$  de celui-ci tel que toute trajectoire issue d'un point dans ce voisinage "tende" vers le foyer, le noeud ou le cycle-limite (en spirale). Si l'on note  $k$  la valeur d'une intégrale première  $H$  dans  $D$  en le foyer, le noeud ou le cycle-limite (tous trois sont des trajectoires), la valeur - constante - de  $H$  le long de toute trajectoire issue d'un point de  $U$  serait égale à  $k$  par continuité :  $H$  serait constante sur  $U$ , ce qui est contradictoire avec la définition d'une intégrale première.  $\square$

On notera que cette façon de procéder suppose acquis les notions et résultats essentiels sur les foyers et les noeuds ( points asymptotiquement stables puisque l'on s'est limité ici au cas  $D$  positivement invariant :  $t$  tend vers  $+\infty$ ) et sur les cycles-limites d'une part, et le résultat **R3** d'autre part. On se dispense alors de l'utilisation du lemme de Morse.

Le lecteur trouvera dans  $[HS] - Ch.11$  et  $Ch.12 - Th.1$ , une démonstration du fait que toutes les trajectoires du système de Lotka-Volterra sont fermées, utilisant la notion de *section locale* d'un flot ...

Remarque : d'une manière générale on pourra être amené à chercher soit une fonction constante (système conservatif), soit une fonction strictement décroissante le long des trajectoires. Dans le second cas (cf. fonctions de *Liapunov*), on cherche à montrer l'existence d'un point asymptotiquement stable pour le système. Ces fonctions jouent en quelque sorte le rôle de l'énergie ... (Voir à ce sujet  $[HS] - Ch.9$ ).

On pourra noter à ce propos que la fonction définie par :

$$V(x, y) = H(x, y) - H(0, 0) = cx + by - d \ln(1 + cx/d) - a \ln(1 + by/a)$$

est une fonction de *Liapunov* pour le système de Lotka-Volterra.

On a ici  $\dot{V}(x, y) = dV(x, y)(f(x, y)) = 0$  et au voisinage de l'origine, le fait que  $V(x, y) > 0$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  peut être obtenu par un développement limité :

$$cx - d \ln(1 + cx/d) = cx - d (cx/d - c^2 x^2 / 2d^2 + o(x^2)) \sim c^2 x^2 / 2d \dots$$

Ceci montre la stabilité de l'équilibre  $(d/c, a/b)$ .

En guise de conclusion, on pourra retenir qu'un centre est une singularité "exceptionnelle" dans la mesure où :

une petite perturbation non linéaire - du moins suffisamment *régulière* (cf. R2) - d'un système linéaire autonome présentant un foyer, un noeud ou un point-selle ne modifie pas le comportement des trajectoires au voisinage du point singulier. Ce n'est pas le cas pour un centre.

Un foyer, un noeud ou un point-selle sont dits *structurellement stables* , un centre est dit *structurellement instable*.

\* \*

\*

### Références :

- [HS] : Differential equations, dynamical systems and linear algebra -  
*M.W. Hirsch / S. Smale* - Academic Press.
- [CL] : Theory of ordinary differential equations  
*E.A. Coddington / N. Levinson* - Mc Graw Hill.
- Cours de D.E.A. (1988) - Systèmes dynamiques - Université P.Sabatier / Toulouse - *R.L. Clerc*.
- Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields -  
*J. Guckenheimer / P. Holmes* - Springer.
- [FR] : Petit guide de calcul différentiel - *F. Rouvière* - Cassini.