Théorème de Lax – Milgram
Application au problème de Dirichlet pour l'équation de Sturm–Liouville

Résumé du cours de MEDP

Maîtrise de mathématiques 2000 – 2001

2001nov18 (medp-lax-milgram.tex)

Dans ce chapitre, on se limitera, pour simplifier, au cas des espaces de Hilbert réels.

1 Rappels

1.1 Théorème. (Théorème de projection) *Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert E. Pour tout $x \in E$ il existe un élément et un seul de F, noté $P_F(x)$ et appelé* projection orthogonale *de x sur F, qui réalise l'infimum* $\inf\{\|x-y\| \mid y \in F\}$*, c'est à dire*

$$\|x - P_F(x)\| \leq \|x - y\| \quad \forall\, y \in F\,.$$

La projection $P_F(x)$ est caractérisée par les propriétés

$$(1) \qquad z = P_F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z \in F\,, \\ \langle y, x - z\rangle = 0, \quad \forall y \in K\,, \ \text{c'est à dire} \ \ x - z \perp F\,. \end{cases}$$

De plus, l'application $P_F : E \to F$ est linéaire, de norme 1.

1.2 Théorème. (Théorème de représentation de Riesz) *Soit $\varphi \in E'$ une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert E. Alors, il existe un vecteur $u_\varphi \in E$ et un seul tel que*

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle x, u_\varphi\rangle_E\,.$$

De plus, on a

$$\|\varphi\|_{E'} := \sup\{|\varphi(x)| \mid x \in E,\ \|x\|_E \leq 1\} = \|u\|_E\,.$$

Autrement dit, l'application $\varphi \to u_\varphi$ réalise une isométrie linéaire de E' (muni de la norme du dual) sur E.

Du théorème de représentation on peut en particulier déduire l'existence et l'unicité, pour tout opérateur linéaire continu $u : E \to F$, d'un opérateur linéaire continue $u^* : F \to E$, appelé *l'adjoint de l'opérateur linéaire u*, tel que

$$(2) \qquad \forall x \in E, \quad y \in F, \qquad \langle u(x), y\rangle_F = \langle x, u^*(y)\rangle_E\,.$$

2 Théorème de Lax – Milgram

Définitions : Soit $a : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On dit que

- a est *continue* (sur E) s'il existe une constante C_a telle que

$$\forall\, x, y \in E, \quad |a(x,y)| \leq C_a \, \|x\|_E \, \|y\|_E \,, \tag{3}$$

- a est $\|\cdot\|_E$-*coercive* s'il existe une constante $\alpha_a > 0$ telle que

$$\forall\, x \in E, \quad \alpha_a \, \|x\|_E^2 \leq a(x,x) \,, \tag{4}$$

- a est *symétrique* si

$$\forall\, x, y \in E, \quad a(y,x) = a(x,y) \,. \tag{5}$$

2.1 Lemme. *Soit* $u : E \to F$ *une application linéaire continue telle qu'il existe* $0 < a < b$ *vérifiant*

$$a \, \|x\|_E \leq \|u(x)\|_F \leq b \, \|x\|_E \,, \qquad \forall x \in E \,.$$

Alors, u *est injective et d'image fermée (c'est à dire que* $u(E)$ *est fermée dans* F*).*

2.2 Théorème. (Théorème de représentation de Lax – Milgram) *Soit* $a : E \times E \to \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire, continue et coercive sur* E *et soit* φ *une forme linéaire continue sur* E*. Alors, il existe un élément* u_φ *et un seul de* E *tel que*

$$\forall x \in E, \quad a(x, u_\varphi) = \varphi(x) \,.$$

De plus, l'application qui à φ *associe* u_φ *est linéaire continue.*

Si on suppose de plus que la forme a *est symétrique, alors l'élément* u_φ *est caractérisé comme étant l'unique élément de* E *qui minimise la fonctionnelle*

$$J(x) := \frac{1}{2} \, a(x,x) - \varphi(x) \,.$$

2.3 Exercice. Montrer que le théorème de Lax–Milgram est un corollaire direct du théorème de représentation de Riesz dans le cas où la forme bilinéaire est symétrique.

2.4 Exercice. Soit $A \in \mathrm{Sym}_{2,+}(\mathbb{R}^n)$ une matrice symétrique réelle, définie positive.

1) Montrer que cette matrice définit une forme bilinéaire symétrique $a(x,y) = {}^t x A y$, symétrique et coercive sur $\mathbb{R}^n$. Déduire du théorème de Lax – Milgram que l'on peut résoudre l'équation $Ax = b$, pour tout $b \in \mathbb{R}^n$ en minimisant la fonctionnelle

$$J(x) = \tfrac{1}{2} \, {}^t x A y - {}^t b \, x \,.$$

2) Refaire le même travail mais sans utiliser le théorème de lax – Milgram. $\lhd$

2.5 Exercice. On considère l'espace vectoriel réel

$$E = \left\{ u \in C^1([0,1], \mathbb{R}) \ \mid \ u(0) = u(1) = 0 \right\} \,,$$

muni du produit scalaire

$$\langle u,v\rangle_1 = \int_0^1 \{\dot u\,\dot v + u\,v\}\,dt\,,$$

où $\dot u$ désigne la dérivée de la fonction u et on note $\|\cdot\|_1$ la norme associée.

On se donne une fonction continue $q : [0,1] \to \mathbb{R}_+^\bullet$ et une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

1) Montrer que l'application $E \times E \ni (u,v) \to a(u,v) \in \mathbb{R}$, définie par

$$a(u,v) = \int_0^1 \{\dot u\,\dot v + q\,u\,v\}\,dt\,,$$

est une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur $(E, \|\cdot\|_1)$.

2) Montrer que $E \ni u \to \int_0^1 f\,u\,dt$ définit une forme linéaire continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$. $\triangleleft$

3 Application à l'étude du problème de Dirichlet pour l'équation de Sturm–Liouville

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On se donne deux fonctions continues $f, q : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose, pour simplifier, qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $q(x) \geq \delta$ pour tout $x \in [a,b]$. On s'intéresse au problème suivant.

$$(6) \qquad \begin{cases} \text{Trouver une fonction } u \text{ dans } C^2([a,b]) \text{ telle que} \\ -\ddot u(x) + q(x)\,u(x) = f(x) \text{ dans }]a,b[\,, \\ u(a) = u(b) = 0\,, \end{cases}$$

où $\dot u$ désigne la dérivée $\frac{du}{dx}$.

• **Unicité.** On peut a priori remarquer que l'on a l'unicité pour le problème (6). En effet, si u_1 et u_2 sont deux solutions de (6), la fonction $w := u_1 - u_2$ vérifie

$$\int_a^b \big(\dot w^2(x) + q(x)\,w^2(x)\big)\,dx = 0\,,$$

d'où l'on déduit immédiatement, compte tenu des hypothèses faites sur q, que $w \equiv 0$.

• **Mise sous-forme variationnelle.** Supposons trouvée une solution u du problème (6). Après multiplication de l'équation de Sturm–Liouville par une fonction $v \in C^1([a,b])$ telle que $v(a) = v(b) = 0$ quelconque, intégration, puis intégration par parties, on trouve

$$(7) \qquad \int_a^b \dot u\,\dot v + q\,u\,v = \int_a^b f\,v \quad \forall\, v \in C^1([a,b]) \text{ tq } v(a) = v(b) = 0\,.$$

Considérons l'espace $\mathcal{A} := C_0^\infty(]a,b[)$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ de l'Exercice 2.5. Sur cet espace, la forme bilinéaire a de l'Exercice 2.5 est symétrique, continue et coercive pour la norme $\|\cdot\|_1$, et la forme linéaire φ est continue. Pour pouvoir appliquer le théorème de Lax–Milgram, il faut compléter $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_1)$.

• **L'espace $H_0^1(]a,b[)$.** Pour interpréter le complété de $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_1)$, on introduit l'espace produit

$$E = L^2(]a,b[) \times L^2(]a,b[)$$

muni du produit scalaire

$$s\big((v_1,w_1),(v_2,w_2)\big) = \langle v_1, v_2\rangle_0 + \langle w_1, w_2\rangle_0$$

où l'indice 0 fait référence au produit scalaire L^2, et de la norme associée $\|\cdot\|_s$. On considère également l'injection j de $\mathcal{A}$ dans E donnée par $j(v) = (v, \dot v)$. Il est clair que j est une isométrie linéaire de $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_1)$ sur son image dans $(E, \|\cdot\|_s)$. On définit l'espace $H^1_0(]a,b[)$ comme étant l'adhérence de $j(\mathcal{A})$ dans E, muni de la structure hilbertienne induite.

• **Interprétation de l'espace $H^1_0(]a,b[)$.** Pour tout $(v,w) \in H^1_0$, il existe une suite $\{v_n\}$ de $\mathcal{A}$ telle que $v_n \overset{L^2}{\to} v$ et $\dot v_n \overset{L^2}{\to} w$. On montre alors facilement que

$$\int_a^b v\,\dot\varphi = -\int_a^b w\,\varphi\,, \qquad \forall\,\varphi \in C^\infty_0(]a,b[)\,. \tag{8}$$

Il résulte d'un résultat du cours d'intégration que la fonction $w \in L^2$ est déterminée de manière unique par la fonction $v \in L^2$ et par la relation (8). On dit que la fonction v admet la fonction w pour *dérivée faible dans* L^2.

On vérifie sans difficulté qu'une fonction $v \in C^1([a,b])$ admet une dérivée faible dans L^2 et que cette dérivée faible est égale (presque partout) à la fonction $\dot v$. Pour cette raison, on notera également $\dot v$ la dérivée faible de la fonction v dans L^2, si elle existe. Le cas échéant, on écrira $w \overset{f}{=} \dot v$.

D'après ce qui précède, on peut donc noter v l'élément $(v,w) \in H^1_0$ où $w \overset{f}{=} \dot v$. On peut alors donner un sens au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ sur H^1_0 (avec la notation de l'Exercice 2.5), et on voit qu'il coincide avec la restriction du produit scalaire s. On peut de même introduire le produit saclaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ sur H^1_0 et étendre à H^1_0 la forme bilinéaire a et la forme linéaire φ de l'Exercice 2.5. Par densité de $j(\mathcal{A})$ dans H^1_0, on déduit que a est bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur H^1_0 muni que la norme $\|\cdot\|_1$ et que la forme linéaire φ est continue.

• **Application du théorème de Lax–Milgram dans H^1_0.** Les hypothèses du théorème de Lax–Milgram pour $\big(H^1_0, a, \varphi\big)$ sont satisfaite et on peut donc en déduire qu'il existe une unique fonction $u \in H^1_0$ telle que

$$a(a,v) = \varphi(v) \quad \forall\, v \in H^1_0$$

ou, plus précisément

$$\exists!\, u \in H^1_0 \quad \text{tq} \quad \int_a^b \dot u\,\dot v + q\,u\,v = \int_a^b f\,v \quad \forall\, v \in H^1_0\,, \tag{9}$$

où $\dot u, \dot v$ désignent les dérivées faibles dans L^2.

La fonction u est L^2 et les fonctions f, q sont continues. Il en résulte que la fonction $qu - f$ est elle aussi L^2. On déduit alors de (9) que la fonction $w := \dot u$ est L^2, qu'elle admet elle aussi une dérivée faible dans L^2 et que l'on a

$$\dot w = f - q\,u\,,$$

ce que nous écrirons $\ddot{u} = f - q\,u$. Nous avons donc démontré

$$(10) \qquad - \ddot{u} + q\,u = f \text{ au sens faible dans }]a,b[\,.$$

• **Condition de Dirichlet et H_0^1.** Il est facile de voir que l'injection naturelle est une application linéaire continue de $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_1)$ dans $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$. Il en résulte immédiatemment une injection naturelle de $(H_0^1, \|\cdot\|_1)$ dans $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$. En particulier, étant donnée $v \in H_0^1$, il existe une unique fonction continue $\tilde{v}$ telle que $v = \tilde{v}$ presque partout. Il résulte de la densité de $j(\mathcal{A})$ dans H_0^1 que $\tilde{v}(a) = \tilde{v}(b) = 0$. Pour cette raison, nous dirons que les éléments de H_0^1 *ont une trace nulle sur le bord de* $]a,b[$.

• **Conclusion.** Les constructions précédentes nous ont permis de montrer qu'il existe une *unique solution variationnelle* du problème de Dirichlet pour l'équation de Sturm–Liouville, c'est à dire une unique fonction $u \in H_0^1(]a,b[)$ vérifiant (9). Cette fonction est également une solution faible de l'équation de Sturm–Liouville, c'est à dire qu'elle vérifie l'équation (10) ou encore

$$\int_a^b u\big(- \ddot{v} + q\,v\big) = \int_a^b f\,v \quad \forall\, v \in C_0^\infty(]a,b[)\,.$$

Enfin, la fonction u vérifie la condition au bord de Dirichlet (annulation en a et b), au sens où sa trace sur le bord est nulle.

Remarquons que l'unicité d'une solution C^2 telle que avons démontrée plus haut résulte également du théorème de Lax–Milgram. Resterait à montrer (et c'est l'objet de la troisième partie du premier devoir à la maison) que la solution variationnelle u est en fait de classe C^2 et qu'elle vérifie l'équation (6).

La formulation variationnelle des problèmes aux limites elliptiques, telle que nous l'eposerons dans la suite du cours, reprend essentiellement les idées ci-dessous (avec une difficulté supplémentaire pour le passage d'une solution variationnelle à une solution classique).

Pierre Bérard

Institut Fourier
UMR 5582 UJF – CNRS

`Pierre.Berard@ujf-grenoble.fr`

`www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/`