Les théorèmes de Riesz et de Lax-Milgram mis en situation

Ivan Nourdin

22 février 2001

Mots-clés: méthode hilbertienne, forme linéaire.

Tout d'abord, énonçons les :

Théorème de Riesz
Soit :
(i) V *un espace de Hilbert (réel) de produit scalaire noté* $< .,. >$,
(ii) L *une forme linéaire continue sur* V.
Le problème abstrait :

$$(*) \text{ Trouver } u \in V \text{ tel que : } \forall v \in V, \ < u, v >= L(v)$$

a une unique solution $u \in V$.

Théorème de Lax-Milgram
Soit :
(i) V *un espace de Hilbert (réel) de produit scalaire noté* $< .,. >$,
(ii) $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire continue elliptique (i.e. telle qu'il existe* $\alpha > 0$ *vérifiant* $a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2$ *pour tout* $v \in V$*),*
(iii) L *une forme linéaire continue sur* V.
Le problème abstrait :

$$(*) \text{ Trouver } u \in V \text{ tel que : } \forall v \in V, \ a(u,v) = L(v)$$

a une unique solution $u \in V$.

Premier exemple. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et de frontière suffisamment régulière.

Proposition *Si* $f \in L^2(\Omega)$*, le problème :*

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x), \ \forall (x,t) \in \Omega \times [0, +\infty[\\ u(x,t) = 0, \ \forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0, +\infty[\end{array} \right.$$

admet une solution unique $u \in H^2(\Omega)$.

Preuve. Supposons que $u \in H^2(\Omega)$ vérifie (*). On a alors $u - \Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$< u - \Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}$$

ou encore :

$$< u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + < \nabla u, \nabla \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}$$

c'est-à-dire (puisque $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$) :

$$\int_\Omega u\varphi + \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$ (par définition même) et que $\varphi \mapsto \int_\Omega u\varphi$, $\varphi \mapsto \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi$ et $\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi$ sont continues sur $H^1_0(\Omega)$, il vient :

$$\int_\Omega u\varphi + \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi \,, mbox \forall \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Il est donc naturel de chercher u comme solution du problème "abstrait" :

$$\begin{cases} (**) \text{ Trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ vérifiant } : \\ \forall v \in H^1_0(\Omega), \ \ < u, v > = L(v) \end{cases}$$

avec $L : H^1_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \int_\Omega fv$. Il est clair que L est une forme linéaire continue (pensez à l'inégalité de Cauchy-Schwarz!). Donc le théorème de Riesz s'applique et donne l'existence d'un unique $u \in H^1_0(\Omega)$ vérifiant $(**)$. Reste à revenir au problème initial et à montrer que $u \in H^2(\Omega)$. Si $u \in H^1_0(\Omega)$ vérifie :

$$\int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv, \ \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

alors on a :

$$< u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + < \nabla u, \nabla \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ou encore :

$$< u - \Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

c'est-à-dire :

$$u - \Delta u = f$$

dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Vu que l'on a supposé Ω de frontière suffisamment régulière, on en déduit que $u \in H^2(\Omega)$ et que l'égalité a lieu dans $L^2(\Omega)$.$\square$

Deuxième exemple. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et de frontière suffisamment régulière.

Proposition *Si $f \in L^2(\Omega)$, le problème :*

$$(*) \begin{cases} -\Delta u(x,t) = f(x), \ \forall (x,t) \in \Omega \times [0,+\infty[\\ u(x,t) = 0, \ \forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0,+\infty[\end{cases}$$

admet une solution unique $u \in H^2(\Omega)$.

Preuve. Supposons que $u \in H^2(\Omega)$ vérifie (*). On a alors $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$< -\Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}$$

ou encore :

$$< \nabla u, \nabla\varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}$$

c'est-à-dire (puisque $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$) :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ (par définition même) et que $\varphi \mapsto \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi$ et $\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi$ sont continues sur $H_0^1(\Omega)$, il vient :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi \, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Il est donc naturel de chercher u comme solution du problème "abstrait" :

$$\begin{cases} (**) \text{ Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ vérifiant } : \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \ a(u,v) = L(v) \end{cases}$$

avec $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \nabla v$ et $L : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \int_\Omega fv$. Il est clair que a est une forme bilinéaire, continue (pensez à l'inégalité de Cauchy-Schwarz!) et coercive (penser à l'inégalité de Poincaré!) et que L est une forme linéaire continue. Donc le théorème de Lax-Milgram s'applique et donne l'existence d'un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $(**)$. Reste à revenir au problème initial et à montrer que $u \in H^2(\Omega)$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv, \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

alors on a :

$$< \nabla u, \nabla \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ou encore :

$$< -\Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

c'est-à-dire :

$$-\Delta u = f$$

dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Vu que l'on a supposé Ω de frontière suffisamment régulière, on en déduit que $u \in H^2(\Omega)$ et que l'égalité a lieu dans $L^2(\Omega)$.$\square$