

## Théorème de la phase stationnaire

<http://www.maths.univ-rennes1.fr/~carles/ENS/>

Pour arriver à présenter ce résultat en développement, on peut (doit?) se restreindre au cas d'une seule variable. On peut aussi se contenter de calculer un équivalent de l'intégrale, et seulement mentionner l'existence d'un développement asymptotique à tout ordre.

**Théorème 1** Soient  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ,  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On suppose que  $\phi$  possède un unique point critique sur  $\text{supp } u$ , et que ce point critique est non dégénéré :

$$\exists! x_c \in \text{supp } u / \phi'(x_c) = 0, \text{ et } \phi''(x_c) \neq 0.$$

On note  $I(\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\phi(x)} u(x) dx$ . Alors (si  $u(x_c) \neq 0$ ),

$$(1) \quad I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn } \phi''(x_c)}}{|\phi''(x_c)|^{1/2}} u(x_c) e^{i\lambda\phi(x_c)}.$$

De plus, il existe des opérateurs différentiels  $A_{2\nu}$  d'ordre au plus  $2\nu$  tels que pour tout  $N \geq 1$ ,

$$(2) \quad \left| I(\lambda) - \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{e^{i\lambda\phi(x_c)}}{\lambda^{\frac{1}{2}+\nu}} \left( A_{2\nu} \left( \frac{d}{dx} \right) u \right) (x_c) \right| \leq \frac{C_N}{\lambda^{\frac{1}{2}+N}},$$

où  $C_N$  dépend de  $u$  et de  $\phi$ .

**Remarques :**

1. Par partition de l'unité, cette formule se généralise au cas où  $\phi$  a plusieurs (forcément un nombre fini) points critiques non dégénérés sur  $\text{supp } u$  : les contributions de chaque point critique se superposent.
2. Ce résultat se généralise au cas de la dimension quelconque. La dérivée seconde de la phase est remplacée par sa hessienne, le signe par la signature de la hessienne, et la première racine dans (1) devient une puissance  $n/2$ .
3. Dans le théorème, on peut aussi supposer que  $u$  est un élément de l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  (et que  $\phi$  possède un unique point critique, non dégénéré).

**Démonstration** : pour simplifier les écritures, on suppose que  $x_c = 0$ . La preuve du théorème s'organise alors comme suit :

1. On factorise la phase  $\phi$  près de 0 pour la rendre quadratique sur un voisinage de l'origine.
2. On montre que les contributions en dehors de ce voisinage sont négligeables dans l'intégrale  $I(\lambda)$ .
3. Par changement de variable, on se ramène à une phase quadratique.
4. On donne un sens à  $\int e^{i\frac{x^2}{2}} dx$  et on en donne la valeur.
5. La preuve se termine par application de la formule de Parseval.

1. D'après la formule de Taylor avec reste intégrale,

$$\phi(x) - \phi(0) = \frac{x^2}{2} \int_0^1 2(1-t)\phi''(tx)dt.$$

Par hypothèse,  $\phi''(0) \neq 0$ , donc il existe un voisinage  $U$  de l'origine tel que  $\phi''$  ne s'annule pas sur  $U$ . On définit

$$\psi(x) := x \left| \int_0^1 2(1-t)\phi''(tx)dt \right|^{1/2}.$$

La fonction  $\psi$  est de classe  $C^\infty$  sur  $U$ . Pour  $x \in V$  voisinage de 0, on a

$$\phi \circ \psi^{-1}(x) - \phi(0) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \phi''(0)x^2.$$

**Remarque** : en dimension supérieure, le même type de résultat est donné par le lemme de Morse, qui se démontre par le théorème d'inversion locale.

2. Soit  $\chi$  une fonction de troncature vérifiant les propriétés suivantes :  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\operatorname{supp} \chi \subset U$ , et  $\chi(x) = 1$  pour  $x$  près de 0. L'intégrale  $I(\lambda)$  se décompose alors en

$$(3) \quad I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\phi(x)}(u\chi)(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\phi(x)}u(1-\chi)(x)dx.$$

La seconde intégrale est négligeable d'après le résultat suivant.

**Lemme 1** (*Lemme de la phase non stationnaire*) Soit  $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . On suppose que  $\phi'$  ne s'annule pas sur  $\operatorname{supp} v$ . Alors pour tout  $N \geq 0$ , il existe une constante  $C$  (dépendant de  $N$ ,  $\phi$  et  $v$ ) telle que

$$(4) \quad \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)}v(x)dx \right| \leq \frac{C}{\lambda^N}.$$

**Remarque** : d'après ce lemme, la seconde intégrale apparaissant dans (3) est un  $O(\lambda^{-N})$  pour tout  $N$ , donc n'intervient pas en vue de la preuve du théorème, car elle contribue toujours comme un reste dans le développement asymptotique.

**Preuve du lemme de la phase non stationnaire** : il suffit d'écrire

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)} v(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi'(x) e^{i\lambda\phi(x)} \frac{v(x)}{\phi'(x)} dx,$$

et de remarquer que par hypothèse, la fonction  $v/\phi' \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Une intégration par parties donne

$$\int_{\mathbb{R}} \phi'(x) e^{i\lambda\phi(x)} \frac{v(x)}{\phi'(x)} dx = \frac{i}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)} \left( \frac{v(x)}{\phi'(x)} \right)' dx.$$

La fonction  $\left( \frac{v}{\phi'} \right)'$  est elle aussi dans  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ , donc on peut recommencer cette manœuvre,  $N$  fois pour démontrer le lemme.  $\square$

4. Définition et calcul de l'intégrale de Fresnel.

**Lemme 2** Soit  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  telle que  $g(0) = 1$ . Alors la limite suivante existe,

$$(5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{x^2}{2}} g(\varepsilon x) dx.$$

De plus, cette limite est indépendante du choix de la fonction  $g$ , on la note  $\int e^{i\frac{x^2}{2}} dx$ , et

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{x^2}{2}} dx = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2\pi}.$$

**Démonstration** : on commence par montrer que cette limite existe et a la valeur annoncée pour une fonction  $g$  particulière, puis on montre que pour une autre fonction, la limite est la même.

Notons  $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2/2} dx$ . En écrivant  $I^2$  comme une intégrale double sur un quart du plan, et en passant en coordonnées polaires, on calcule directement  $I = \sqrt{2\pi}$ . Par changement de variable homogène, on a, pour tout  $\sigma > 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma \frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}}.$$

Par prolongement analytique, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  avec  $\operatorname{Re} z > 0$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-z \frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}.$$

Prenons  $z = \varepsilon^2 - i$ .

$$(6) \quad \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(\varepsilon x)^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon^2 - i}}.$$

Le second membre a une limite quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, donc pour  $f(x) = e^{-x^2/2}$  (qui est bien une fonction comme dans l'énoncé du lemme),

$$\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{x^2}{2}} f(\varepsilon x) dx = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2\pi}.$$

Soit maintenant une fonction  $g$  comme dans le lemme. En écrivant  $g = g - f + f$ , on constate qu'il suffit de montrer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{x^2}{2}} (g - f)(\varepsilon x) dx = 0$$

pour achever la preuve du lemme.

En posant  $y = \varepsilon x$  dans l'intégrale précédente, il vient

$$(7) \quad \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{x^2}{2}} (g - f)(\varepsilon x) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{y^2}{2\varepsilon^2}} (g - f)(y) dy.$$

On procède alors comme dans la preuve du lemme de la phase non stationnaire, en remarquant que la fonction

$$x \mapsto \frac{g(x) - f(x)}{x}$$

est également dans la classe de Schwartz. Une intégration par parties montre alors que l'intégrale (7) est un  $O(\varepsilon)$ , ce qui achève la preuve du lemme.  $\square$

5. Il reste pour terminer la preuve du théorème à étudier la première intégrale dans (3). Par le changement de variable  $x = \psi^{-1}(y)$  (qui a bien un sens car la fonction  $\chi$  est supportée dans  $U$  voisinage de l'origine où est défini le difféomorphisme  $\psi$ ), cette intégrale devient

$$(8) \quad e^{i\lambda\phi(0)} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{\lambda}{2}y^2 \operatorname{sgn} \phi''(0)} (u\chi) \circ \psi^{-1}(y) |(\psi^{-1})'(y)| dy.$$

Notons  $w = |(\psi^{-1})'| \cdot (u\chi) \circ \psi^{-1}$ . Par construction,  $w \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . On applique la formule de Parseval,

$$\int_{\mathbb{R}} f \bar{g} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f} \bar{\hat{g}},$$

avec  $f(y) = e^{i\frac{\lambda}{2}y^2 \operatorname{sgn} \phi''(0)}$  et  $\bar{g} = w$ . La formule de Parseval s'applique à des fonctions de  $L^2$ , et évidemment  $f \notin L^2$ : le calcul qui suit se justifie en remplaçant  $f$  par  $f_\varepsilon(y) = e^{i\frac{\lambda}{2}y^2} e^{-\varepsilon^2 y^2/2}$  et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0. Cette justification est une conséquence du lemme 2.

Le calcul des intégrales de Fresnel (en passant par la forme canonique) donne

$$\hat{f}(\xi) = e^{-i\frac{\operatorname{sgn} \phi''(0)}{2\lambda} \xi^2} e^{i \operatorname{sgn} \phi''(0) \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}.$$

L'intégrale (8) vaut donc

$$e^{i\lambda\phi(0)} \frac{e^{i \operatorname{sgn} \phi''(0) \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i \frac{\operatorname{sgn} \phi''(0)}{2\lambda} \xi^2} \bar{g}(\xi) d\xi.$$

Par convergence dominée, la dernière intégrale tend, lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ , vers

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{g}(\xi) d\xi = 2\pi \bar{g}(0) = 2\pi w(0),$$

d'après la formule d'inversion de Fourier. On a aussi

$$\begin{aligned} w(0) &= (u\chi)(0)(\psi^{-1})'(0) \\ &= \frac{u(0)}{\psi'(0)} \\ &= \frac{u(0)}{|\phi''(0)|^{1/2}}. \end{aligned}$$

Ceci prouve la première partie du théorème. Il semble délicat de prouver la seconde partie (manque de temps sans doute), mais il faut mentionner qu'on a toutes les cartes en main pour le faire : il s'agit d'utiliser le développement de Taylor de la fonction exponentielle à l'origine, en rappelant que la transformée de Fourier échange produit par un polynôme et dérivation.