Université de Rennes 1 – Préparation
à l'agrégation de mathématiques
http://agreg-maths.univ-rennes1.fr

Développement asymptotique de l'intégrale $\int \frac{\sin t}{t}\, dt$

Yves Coudene 16/10/03

L'intégrale $\int_0^N \frac{\sin t}{t}\, dt$ tend vers $\pi/2$ lorsque N tend vers l' infini. Quitte à faire quelques calculs, on peut obtenir un développement asymptotique complet :

$$\int_0^N \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^N \Big(\int_0^\infty e^{-tx} dx\Big) \sin t\, dt = \int_0^\infty \int_0^N e^{-tx} \sin t\, dt\, dx$$

L'intégrale $\int_0^N e^{-tx} \sin t\, dt$ se calcule explicitement à l'aide des complexes :

$$\int_0^N e^{-tx} \sin t\, dt = Im\Big(\int_0^N e^{-tx+it}\, dt\Big) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{e^{-Nx}}{1+x^2}(\cos N + x \sin N)$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}\int_0^N \frac{\sin t}{t}\, dt &= \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{e^{-Nx}}{1+x^2}(\cos N + x\sin N) dx \quad , \qquad v = Nx \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\cos N}{N} \int_0^\infty \frac{e^{-v}}{1+\frac{v^2}{N^2}}\, dv - \frac{\sin N}{N^2} \int_0^\infty \frac{v e^{-v}}{1+\frac{v^2}{N^2}}\, dv\end{aligned}$$

On utilise maintenant le développement en série de $\frac{1}{1+x^2}$, dont le reste est explicite :

$$\frac{1}{1+\frac{v^2}{N^2}} = \sum_{k=0}^K \Big(-\frac{v^2}{N^2}\Big)^k + \frac{\Big(-\frac{v^2}{N^2}\Big)^{K+1}}{1+\frac{v^2}{N^2}} \quad ,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-v}}{1+\frac{v^2}{N^2}}\, dv = \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k}{N^{2k}} \underbrace{\int_0^\infty v^{2k} e^{-v} dv}_{=(2k)!} + \frac{1}{N^{2k+2}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{(-v^2)^{K+1} e^{-v}}{1+\frac{v^2}{N^2}} dv}_{|\quad| \leq (2k+2)!}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-v}}{1+\frac{v^2}{N^2}}\, dv &= \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k}{N^{2k}}\, (2k)! + o\Big(\frac{1}{N^{2K}}\Big) \\ \int_0^\infty \frac{v e^{-v}}{1+\frac{v^2}{N^2}}\, dv &= \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k}{N^{2k}}\, (2k+1)! + o\Big(\frac{1}{N^{2K}}\Big)\end{aligned}$$

Résultat :

$$\begin{aligned}\int_0^N \frac{\sin t}{t}\, dt &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^K (-1)^k \Big[(2k)!\, \frac{\cos N}{N^{2k+1}} + (2k+1)!\, \frac{\sin N}{N^{2k+2}}\Big] + o\Big(\frac{1}{N^{2K+2}}\Big) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\cos N}{N} - \frac{\sin N}{N^2} + 2\,\frac{\cos N}{N^3} + 6\,\frac{\sin N}{N^4} + o\Big(\frac{1}{N^4}\Big)\end{aligned}$$

Ce développement illustre les points suivants :
– utilisation de la transformée de Laplace ;
– calcul d'intégrales réelles en passant dans le domaine complexe ;
– fonction Gamma ;
– obtention d'une asymptotique en mettant l'expression à évaluer sous la forme d'une intégrale dépendant d'un paramètre ;
– obtention d'un reste sous forme intégrale, ce qui permet d'obtenir des équivalents, mais aussi des encadrements.
Enfin pour finir, il faut remarquer que la série obtenue est divergente.