4 Théorème d'échantillonnage de Shannon

On note BL^2 le sous-espace des fonctions de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est nulle (presque partout) en dehors de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.

Théorème. *L'espace BL^2 jouit des propriétés suivantes :*
i) C'est un espace de Hilbert*.*
ii) Tout fonction de BL^2 admet un représentant continu borné qui est même analytique.
iii) On a l'identité $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)\mathrm{sinc}(.-n)$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ (et même dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$).

iv) L'application $u \mapsto (u(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une isométrie de BL^2 sur $l^2(\mathbb{Z})$.

Preuve.
Pour voir que BL^2 est un espace de Hilbert, il suffit de montrer que c'est un sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Soit donc $u_p \in \mathrm{BL}^2 \overset{p\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Par continuité de la transformée de Fourier sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on a $\|\hat{u_p} - \hat{u}\|_2 \overset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, $\|\hat{u_p} - \hat{u}\|_{2,\mathbb{R}\setminus[-1/2,1/2]} \overset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui s'écrit encore $\|\hat{u}\|_{2,\mathbb{R}\setminus[-1/2,1/2]} = 0$. On en déduit que $\hat{u}$ est presque partout nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$, d'où $u \in \mathrm{BL}^2$, et le point *i*) est montré. On pouvait aussi remarquer que BL^2 est isométriquement isomorphe à $\mathrm{L}^2([-1/2, 1/2])$ par la transformation de Fourier.

Pour montrer le point *ii*), on introduit la transformée de Laplace de $\hat{u}$. $\hat{u}$ est élément de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($[-1/2, 1/2]$ étant de mesure finie), F est donc bien définie sur $\mathbb{C}$ par $F(z) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi\xi z}\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi$ (la transformée de Laplace usuelle de $\hat{u}$ serait en fait $z \mapsto F(iz/2\pi)$). Comme $\hat{u}$ est élément de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la formule d'inversion de Fourier permet d'affirmer que $u(x) = F(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrons que F est holomorphe sur $\mathbb{C}$:
- Pour tout $\xi \in [-1/2, 1/2]$, $z \mapsto e^{2i\pi\xi z}\hat{u}(\xi)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$,
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant K$ (où K est un réel > 0 fixé), $\xi \in [-1/2, 1/2] \mapsto e^{2i\pi\xi z}\hat{u}(\xi)$ est une fonction mesurable et de module majoré par $e^{\pi K}\hat{u}(\xi)$, qui est une fonction intégrable de ξ sur $[-1/2, 1/2]$.

Il s'ensuit que F est holomorphe sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème d'holomorphie relatif aux intégrales à paramètre, de plus on a $F^{(k)}(z) = (2i\pi)^k \int_{-1/2}^{1/2} \xi^k e^{2i\pi\xi z}\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi$ pour tout entier k. On voit en particulier que $|F^{(k)}(z)| \leqslant \pi^k e^{\pi|\mathrm{Im}(z)|}\|\hat{u}\|_2$ soit encore $|F^{(k)}(z)| \leqslant \pi^k e^{\pi|\mathrm{Im}(z)|}\|u\|_2$ (puisque la transformation de Fourier est une isométrie de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$).

On en déduit que u a un représentant continu qui est même analytique (à savoir $x \mapsto F(x)$, on prendra désormais toujours un tel représentant), de plus on a $\|u^{(k)}\|_\infty \leqslant \pi^k\|u\|_2$ pour tout entier k. On a donc montré le point *ii*), et plus précisément que la topologie de BL^2 est plus fine que celle de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, et même que celle de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Pour montrer le point *iii*), on commence par remarquer que BL^2 est isométriquement isomorphe à $\mathrm{L}^2([-1/2, 1/2])$ (par la transformation de FOURIER). La famille des $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $e_n(\xi) = e^{2i\pi n\xi}$ étant une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2([-1/2, 1/2])$, la famille des $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $\varepsilon_n = \bar{\mathcal{F}}(e_n)$ est donc une base hilbertienne de BL^2. Pour $u \in \mathrm{BL}^2$, on a donc l'égalité $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} < u, \varepsilon_n > \varepsilon_n$, mais la convergence a aussi lieu dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ (et même dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) puisque nous avons vu que la topologie L^2 est plus fine que celle de la convergence uniforme dans BL^2.

On écrit que $\varepsilon_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi\xi x} e_n(\xi)\mathrm{d}\xi$ soit encore $\varepsilon_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi\xi(x+n)}\mathrm{d}\xi$, d'où $\varepsilon_n(x) = \left[\frac{e^{2i\pi\xi(x+n)}}{2i\pi\xi(x+n)}\right]_{\xi=-1/2}^{1/2}$. On a finalement $\varepsilon_n(x) = \mathrm{sinc}(x+n)$, où la fonction sinc est définie sur $\mathbb{R}$ (prolongée par continuité en 0) par $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}$.

L'identité précédente s'écrit alors $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} < u, \mathrm{sinc}(.+n) > \mathrm{sinc}(.+n)$, comme elle a lieu entre autres dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ on a en particulier $u(-n) =< u, \mathrm{sinc}(.+n) >$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Cela nous permet de réécrire $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(-n)\mathrm{sinc}(.+n)$, ou encore $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)\mathrm{sinc}(.-n)$, et le point *iii*) est montré.

Enfin, la théorie des espaces de HILBERT nous dit que $u \mapsto (< u, \varepsilon_n >)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une isométrie de BL^2 sur $\mathrm{l}^2(\mathbb{Z})$; le point *iv*) s'en ensuit immédiatement.

□

Leçons possibles
201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.
(**205** Espaces complets. Exemples et applications.)
(**207** Prolongement de fonctions. Applications.)
210 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.
212 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.
213 Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
(**228** Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.)
(**234** Espaces L^p.)
239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
240 Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.
(**244** Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.)
((**246** Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.))

Références
willem ?