5 Formule de Poisson et application

Théorème (Formule sommatoire de Poisson). *Soit $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ vérifiant :*
i) $\exists \alpha > 1$, $|F(x)| \leqslant |x|^{-\alpha}$ pour $|x|$ voisin de $+\infty$,
ii) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{F}(n)| < +\infty$.
On a alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}(n)$.

On a noté $\hat{F} : \xi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} F(x)dx$ la transformée de Fourier de F (bien définie car $F \in L^1(\mathbb{R})$ en vertu de i).

Preuve.
Soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+n)$. f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ car la série (à double sens) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+n)$ converge normalement sur les compacts. En effet, si $K > 0$, alors pour $x \in [-K, K]$ on a $|x+n| \geqslant |n|/2$ dès que $|n| \geqslant 2K$, de sorte que pour $|n|$ assez grand $|F(x+n)| \leqslant (|n|/2)^{-\alpha}$, qui est le terme général d'une série normalement convergente (car $\alpha > 1$).

De plus, on voit par une réindexation évidente que f est 1-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier : pour $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_m(f) &= \int_0^1 e^{-2i\pi mt} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2i\pi mt} F(t+n)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-2i\pi mt} F(t+n)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

L'interversion est autorisée puisque la somme converge normalement sur les compacts (et l'intervalle d'intégration est de mesure finie). On écrit encore

$$\begin{aligned} c_m(f) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} e^{-2i\pi mu} F(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi mu} F(u)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Le « recollement » étant autorisé car $u \mapsto e^{-2i\pi u} F(u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On a donc finalement $c_m(f) = \hat{F}(m)$.

Comme f est continue et $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m(f)| < +\infty$, la série de Fourier de f converge normalement vers f. En particulier, on a $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{2i\pi nx}$ pour tout réel x, soit encore $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}(n) e^{2i\pi nx}$. On obtient la formule de Poisson en prenant $x = 0$. $\square$

Comme application, on propose de donner un équivalent au voisinage de 1 de la fonction thêta d'AIRY :

On considère la série $\Theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n^2}$. Il s'agit d'une série entière puisque $\Theta(z) = 2\sum_{n\geqslant 0} z^{n^2} - 1$. Son rayon de convergence est 1, car pour $0 \leqslant r < 1$, on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{n^2} < \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^n < +\infty$, et la série diverge en $r = 1$.

Soit $\omega > 0$ et posons $F(x) = e^{-\omega x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. F est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'hypothèse *i*) du théorème. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a $\hat{F}(n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi nx} e^{-\omega x^2} \mathrm{d}x$, soit encore $\hat{F}(n) = e^{-\pi^2 n^2/\omega} \int_{\mathbb{R}} e^{-\omega(x+i\pi n/\omega)^2} \mathrm{d}x$. J'explique rapidement une manière de calculer cette intégrale. On écrit que l'intégrale de la fonction holomorphe $z \mapsto e^{-\omega z^2}$ sur un rectangle « posé » sur l'axe des réels et de « hauteur » $\pi n/\omega$ est nulle. On montre sans difficulté que les termes de bord tendent vers 0 quand la longueur du rectangle tend vers $+\infty$. On en déduit que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\omega(x+i\pi n/\omega)^2} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-\omega x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}$. Finalement, $\hat{F}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{-\pi^2 n^2/\omega}$.

L'hypothèse *ii*) du théorème est donc vérifiée, et la formule de POISSON nous dit que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-wn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi^2 n^2/\omega}$.

Cette identité se réécrit $\Theta(e^{-\omega}) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \Theta(e^{-\pi^2/\omega})$, soit encore $\sqrt{\pi}\Theta(e^{-\pi^2 u}) = \frac{\Theta(e^{-1/u})}{\sqrt{u}}$ (pour tout $u > 0$). On en déduit que $\lim_{u\to+\infty} \frac{\Theta(e^{-1/u})}{\sqrt{u}} = \sqrt{\pi}$, soit encore $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{-\log x}\,\Theta(x) = \sqrt{\pi}$. Il s'ensuit que $\Theta(x) \overset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{-\frac{\pi}{\log x}}$, finalement $\Theta(x) \overset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$.

Leçons possibles

227 Développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

235 Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.

237 Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
240 Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.
241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
242 Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.
246 Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.

Références

[QZ02] pp.93-94.
[Gou94] pp.269-270.