6 Densité des polynômes orthogonaux

Quelques définitions et rappels.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle poids toute fonction $\omega : I \to \mathbb{R}$ mesurable, partout > 0 et « à décroissance rapide » dans le sens suivant : $\int_I |x|^n \omega(x) \mathrm{d}x < +\infty$ pour tout entier n (autrement dit les polynômes sont intégrables pour la mesure $\omega \mathrm{d}\lambda$). En particulier, si I est borné, toute fonction intégrable > 0 convient.

Par définition de la fonction poids, la mesure $\omega \mathrm{d}\lambda$ sur I est finie. En particulier, on a $\mathrm{L}^r(I, \omega \mathrm{d}\lambda) \subset \mathrm{L}^s(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$ dès que $r \geqslant s$.

$\mathrm{L}^2(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle_\omega = \int_I f(x) g(x) \omega(x) \mathrm{d}x$. Le k-ème polynôme orthogonal associé à ω est le polynôme de norme 1 qui dirige la droite vectorielle orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_k[X]$. On montre que la famille des polynômes orthogonaux s'obtient également en appliquant le procédé de Gram-Schmidt sur la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. Bref, une telle famille orthonormale de polynômes échelonnés existe et est unique, de plus c'est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Théorème. *Si ω est « à décroissance exponentielle » dans le sens suivant : $\exists \alpha > 0$, $\int_I e^{\alpha |x|} \omega(x) dx < +\infty$, alors les polynômes orthogonaux associés à ω forment une base hilbertienne de $L^2(I, \omega d\lambda)$.*

Preuve.
Nous avons déjà vu que la famille des polynômes orthogonaux associés à ω est une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$. Qu'elle soit une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$ revient donc à dire que les polynômes sont denses de $\mathrm{L}^2(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$. Nous allons montrer que $\{x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}\}^{\perp_\omega} = \{0\}$, ce qui répondra à la question.

Soit donc $f \in \mathrm{L}^2(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$ telle que $\int_I x^n f(x) \omega(x) \mathrm{d}x = 0$ pour tout entier n. Il s'agit de montrer que $f \overset{\text{p.p.}}{=} 0$.

Soit g la fonction définie (presque partout) sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \omega(x) \mathbf{1}_I(x)$. Alors $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ (car $f \in \mathrm{L}^1(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$), on peut donc considérer sa transformée de Fourier $\hat{g} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) g(x) \omega(x) \mathrm{d}x$. Nous allons montrer que g se prolonge en une fonction holomorphe sur $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, |\mathrm{Im} z| < \alpha/2\}$.

Pour cela, on introduit la fonction F définie par $F(z) = \int_I h(z, x) \mathrm{d}x$, où on a noté $h(z, x) = e^{-izx} f(x) \omega(x)$ (à peu de choses près, il s'agit de la transformée de Laplace de g).

Montrons que F est bien définie et holomorphe sur B_α :
– Pour tout $x \in I$, $z \mapsto h(z, x)$ est holomorphe sur B_α.

– Pour tout $z \in B_\alpha$, la fonction $x \mapsto h(z,x)$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables.
– Pour tout $z \in B_\alpha$, la fonction $x \mapsto h(z,x)$ est majorée en module par $x \mapsto e^{|\alpha|x/2}|f(x)|\omega(x)$, qui est une fonction intégrable sur I (et indépendante de z). En effet, $x \mapsto e^{|\alpha|x/2}$ et f sont des fonctions de $\mathrm{L}^2(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$ par hypothèse, leur produit est donc dans $\mathrm{L}^1(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$.

D'après le théorème d'holomorphie relatif aux intégrales à paramètre, la fonction F est bien définie et holomorphe sur $B\alpha$.

De plus, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(z) = \int_I \frac{\partial^n h(z,x)}{\partial z^n}\mathrm{d}x$ soit $F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x)\omega(x)\mathrm{d}x$. En particulier (en utilisant l'hypothèse sur f), on a $F^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que F est nulle sur un voisinage de 0, puis que F est nulle sur tout B_α par principe de prolongement analytique. En particulier, sa restriction $\hat{g}$ à l'axe des réels est identiquement nulle.

Par injectivité de la transformée de Fourier sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on en déduit que $g \overset{\text{p.p.}}{=} 0$ sur $\mathbb{R}$, puis que $f \overset{\text{p.p.}}{=} 0$ sur I (car ω reste > 0 sur I).

$\square$

L'hypothèse « à décroissance rapide » ne suffit pas comme le montre l'exemple suivant :

On pose $I =]0, +\infty[$ et $\omega(x) = x^{-\log(x)}$ pour $x \in I$. w est bien un poids sur I. Nous allons montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(2\pi \log(x))$ n'est pas limite de polynômes dans $\mathrm{L}^2(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$: f n'est pas la fonction nulle (presque partout), or pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\langle X^n, f\rangle_\omega = 0$. Vérifions-le :

Par le changement de variable $y = \log(x)$ (qui est un difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$), on a $\langle X^n, f\rangle_\omega = \int_0^{+\infty} x^n \sin(2\pi \log(x))\omega(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(n+1)y} \sin(2\pi y) e^{-y^2}\mathrm{d}y$, soit $\langle X^n, f\rangle_\omega = e^{(n+1)^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-\frac{n+1}{2})^2} \sin(2\pi y)\mathrm{d}y$, puis par le changement de variable affine $u = y - \frac{n+1}{2}$, il vient $\langle X^n, f\rangle_\omega = (-1)^{n+1} e^{(n+1)^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sin(2\pi u)\mathrm{d}u$. L'intégrande étant une fonction impaire, on a effectivement $\langle X^n, f\rangle_\omega = 0$.

Leçons possibles
(**201** Espaces de fonctions. Exemples et applications.)
202 Exemples de parties denses et applications. (205 Espaces complets. Exemples et applications.)
(**209** Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.)
212 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.

213 Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
234 Espaces L^p
239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
240 Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.
(**244** Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.)
(**245** Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.)
248 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiale ou polynômiales par morceaux. Exemples.

Références
[BMP05]