8 Tipi de Cantor

Le « tipi de Cantor » (ou « éventail de Knaster-Kuratowski ») est une partie $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}^2$ définie comme suit :

On rappelle que l'espace triadique de Cantor K_3 est obtenu en ôtant au segment $[0,1]$ une réunion dénombrable d'intervalles ouverts I_n. C'est un espace compact et totalement discontinu. K_3 est réunion disjointe de $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial I_n$ (le « bord », dénombrable) et $\mathcal{G} = K_3 \setminus \mathcal{B}$ (le « gras »). $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$ sont tous deux denses dans K_3 (et donc aussi tous deux d'intérieur vide) (*).

Soit s le point de coordonnées $(1/2, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour $c \in \mathcal{B}$, on appelle $\mathcal{T}_c$ l'ensemble des points « rationnels » du segment $[s,c]$, c'est-à-dire d'ordonnées rationnelles ; et pour $c \in \mathcal{G}$ on prend pour $\mathcal{T}_c$ l'ensemble des points « irrationnels » sur le segment $[s,c]$.

On pose alors $\mathcal{T} = \bigcup_{c\in K_3} \mathcal{T}_c$. On munit $\mathcal{T}$ de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

s

Proposition. *L'espace $\mathcal{T}$ est connexe. En revanche, $\mathcal{T} \setminus \{s\}$ est totalement discontinu.*

Preuve.
Commençons par la seconde affirmation. Soit $m \in \mathcal{T} \setminus \{s\}$, il s'agit de montrer que la composante connexe de m (dans $\mathcal{T} \setminus \{s\}$) est réduite au singleton $\{m\}$. Soit c le point de K_3

tel que $m \in \mathcal{T}_c$.

On montre d'abord que la composante connexe de m est contenue dans $\mathcal{T}_c$: soit $m' \in \mathcal{T} \setminus \{s\}$ tel que $m' \notin \mathcal{T}_c$. Soit $c' \in K_3$ tel que $m' \in \mathcal{T}_{c'}$. Il est clair qu'on peut trouver $\theta \in [c, c']$ tel que $\theta \notin K_3$. La droite de $\mathbb{R}^2$ passant par s et θ ne rencontre pas $\mathcal{T}$, donc elle sépare le plan en deux ouverts disjoints dont la réunion contient $\mathcal{T}$; de plus ces deux ouverts contiennent respectivement m et m'. Ceci prouve que m et m' ne sont pas dans la même composante connexe de $\mathcal{T} \setminus \{s\}$.

Il s'ensuit que la composante connexe de m dans $\mathcal{T} \setminus \{s\}$ est la composante de m dans $\mathcal{T}_c$ (pour la topologie trace). $\mathcal{T}_c$ étant totalement discontinu (il est homéomorphe à un segment de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), la composante de m est réduite à $\{m\}$.

Montrons maintenant que $\mathcal{T}$ est connexe. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ tels que $\mathcal{T} \subset U \cup V$ et $\mathcal{T} \cap U \cap V = \emptyset$. On suppose par exemple que $s \in U$, il s'agit donc de montrer que $U \cap \mathcal{T} = \mathcal{T}$.

On définit la « hauteur » d'un point $c \in K_3$ par $h(c) = \sup\{y_m,\ m \in \mathcal{T}_c \cap V\}$ (on pose $h(c) = 0$ si $\mathcal{T}_c \cap V = \emptyset$). Pour $q \in \mathbb{Q} \cap]0, 1]$, notons $F_q = \overline{h^{-1}(\{q\})}$ l'adhérence de l'ensemble des points de hauteur q. Chaque F_q est d'intérieur vide dans K_3 car il ne rencontre pas $\mathcal{B}$. En effet, si $b \in \mathcal{B}$, le point du segment $[s, b]$ de hauteur q est dans $\mathcal{T}_b$, donc dans U ou bien dans V. Dans le premier cas, comme U est ouvert, les points suffisamment voisins de b ont une hauteur $< q$, donc b n'est pas limite de points de hauteur q. De même, dans le second cas les points suffisamment voisins de q ont une hauteur $> q$, et la même conclusion s'ensuit.

On remarque que si $g \in \mathcal{G}$, alors $h(g)$ est rationnel : sinon le point $m \in [s, g]$ d'ordonnée $h(g)$ serait dans $\mathcal{T}$, donc dans U ou bien dans V. Dans les deux cas, U et V étant des ouverts, on contredit la définition de $h(g)$. On a donc $\mathcal{G} = H \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap]0,1]} F_q$, où H est l'ensemble des points de $\mathcal{G}$ de hauteur nulle.

On peut alors écrire $K_3 = \left(\mathcal{B} \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap]0,1]} F_q\right) \sqcup H$. Or $\mathcal{B} \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap]0,1]} F_q$ est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide de K_3 (rappelons que $\mathcal{B}$ est dénombrable), c'est donc une partie d'intérieur vide de K_3 (qui est un espace compact donc de Baire). On en déduit que H est dense dans $\mathcal{T}$. Il est alors clair que $\bigcup_{c \in H} \mathcal{T}_c$ est dense dans $\mathcal{T}$, en particulier U est dense dans $\mathcal{T}$ (car $\bigcup_{c \in H} \mathcal{T}_c \subset U$, les éléments de H étant de hauteur nulle). Comme U est un ouvert, on a en fait $U \cap \mathcal{T} = \mathcal{T}$, ce qu'il fallait.

$\square$

(*) On peut voir ceci de la manière suivante : les points de $\mathcal{B}$ sont les nombres de K_3 dont le développement « propre » en base 3 est fini. Il est clair que ces nombres sont denses dans K_3. Au passage, K_3 est lui formé des nombres dont le développement « impropre » en base 3 ne contient aucune occurrence du chiffre « 1 ».

Par ailleurs, de manière générale, si un espace topologique X est réunion disjointe de deux parties $X = A \sqcup B$, alors on se convainc sans mal que A est dense si et seulement si B est d'intérieur vide.

L'éventail de Knaster-Kuratowski, en plus d'être une pathologie remarquable, fournit un exemple d'espace topologique qui est séparé (même métrique) et totalement discontinu mais loin d'être « 0-dimensionnel », ce qui signifie « ayant une base d'ouverts-fermés ». C'est immédiat : par exemple l'ouvert $\{m,\ y_m < 1/2\}$ de $\mathcal{T} \setminus \{s\}$ ne peut pas contenir d'ouvert-fermé, car ce serait un ouvert-fermé strict de $\mathcal{T}$ (qui est connexe). Signalons qu'un espace 0-dimensionnel séparé est toujours totalement discontinu, ce qui est évident, la réciproque est vraie dans les espaces localement compacts (par exemple, l'espace de Cantor est 0-dimensionnel).

Leçons possibles
((**203** Utilisation de la notion de compacité.))
204 Connexité. Exemples et applications.
((**205** Espaces complets. Exemples et applications.))
((**209** Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.))

Références
[Wil70]