9 Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème (d'Alembert-Gauss). *Tout polynôme non constant P à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.*

Preuve.
Nous allons montrer que $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjectif, et plus précisément que toutes les valeurs complexes sont prises un même nombre fini de fois par P, sauf peut-être un nombre fini d'entre elles (lesquelles sont également atteintes).

Soit $S = \{z \in \mathbb{C}, P'(z) = 0\}$ l'ensemble des points critiques de P et $\Sigma = P(S)$ l'ensemble de ses valeurs critiques. S est fini (et donc Σ) car P étant non constant, P' est non nul.

Soit τ l'application qui associe à une valeur $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ le cardinal de $P^{-1}(\alpha)$, la « fibre au-dessus de α ». Ce cardinal est fini car $P - \alpha$ n'est pas le polynôme nul. Nous allons montrer que $\tau : \mathbb{C} \setminus \Sigma \to \mathbb{N}$ est une application localement constante. Admettons-le un instant, on en déduit que τ est constante par connexité de $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ (Σ étant fini). Cette constante est non nulle car sinon on aurait $P^{-1}(\Sigma) = \mathbb{C}$, ce qui est absurde puisque $P^{-1}(\Sigma)$ est fini. En particulier, toute valeur régulière est atteinte par P, mais par définition les valeurs critiques sont également atteintes, et le théorème est montré.

Il nous reste donc à montrer que τ est localement constante. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$. Deux cas se présentent :

- Si $P^{-1}(\alpha) = \emptyset$ (α n'est pas atteinte par P), il s'agit de montrer que $P^{-1}(\beta) = \emptyset$ pour β suffisamment proche de α. Cela découle simplement du fait que l'image de P est fermée dans $\mathbb{C}$. En effet, P est une application propre (elle est continue et $|P(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$), en particulier c'est une application fermée.

- Sinon, notons $P^{-1}(\alpha) = \{z_1, ..., z_m\}$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, z_i n'est pas un point critique de P donc on peut appliquer le théorème d'inversion locale : il existe un voisinage ouvert U_i de z_i tel que $P_{|U_i}$ soit un difféomorphisme sur son image. Quitte à restreindre, on peut supposer que les U_i sont deux à deux disjoints et qu'ils sont envoyés sur un même ouvert $V \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma$ contenant α. On pose alors $W = V \setminus P((\bigcup_{i=1}^{m} U_i)^c)$. W contient α et c'est un ouvert car P est une application fermée. On voit alors que si $\beta \in W$, alors β a exactement une image réciproque dans chacun des U_i (et aucune ailleurs), si bien que $\tau(\beta) = m$, ce qui conclut la démonstration.

$\square$

Complément : applications propres entre espaces localement compacts

(Rappelons que par définition, un espace localement compact est séparé.)

Soient X et Y deux espaces topologiques localement compacts. Une application $f : X \to Y$ est dite propre si elle est continue et si l'image réciproque de tout compact de Y par f est un compact de X.

Proposition. *Soient $\hat{X} = X \cup \{\hat{x}\}$ et $\hat{Y} = Y \cup \{\hat{y}\}$ les compactifiés d'Alexandrov de X et Y. Alors f est propre si et seulement si son prolongement $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ par $f(\hat{x}) = \hat{y}$ est continu.*

Preuve.
Supposons que f soit propre. Soit F un fermé de $\hat{Y}$. Si F contient $\hat{y}$, alors $\hat{Y} \setminus F$ est un ouvert de $\hat{Y}$ ne contenant pas $\hat{y}$, c'est donc un ouvert de Y. Il s'ensuit que $\hat{f}^{-1}(\hat{Y} \setminus F) = f^{-1}(\hat{Y} \setminus F)$ est un ouvert de X par continuité de f, c'est donc aussi un ouvert de $\hat{X}$. On en déduit que $\hat{f}^{-1}(F)$ est fermé dans $\hat{X}$. Si F ne contient pas $\hat{y}$, c'est un compact de Y donc $\hat{f}^{-1}(F) = f^{-1}(F)$ est un compact de X par propreté de f. C'est donc un fermé de $\hat{X}$, et on a montré que $\hat{f}$ est continue.

Supposons maintenant que $\hat{f}$ soit continue. Cela entraîne évidemment que f est continue. Soit K un compact de Y. C'est un fermé de $\hat{Y}$ ne contenant pas $\hat{y}$, on en déduit que $f^{-1}(K) = \hat{f}^{-1}(K)$ est un fermé de $\hat{X}$ ne contenant pas $\hat{x}$ par continuité de $\hat{f}$. C'est donc un compact de X, ce qui prouve que f est propre.

$\square$

En particulier, on voit que si X et Y sont des espaces vectoriels normés de dimension finie, f est propre si et seulement si elle est continue et $\|x\| \to +\infty$ entraîne $\|f(x)\| \to +\infty$ (ce qui est d'ailleurs facile à montrer indépendamment de la propriété précédente).

Proposition. *Si $f : X \to Y$ est propre, c'est une application fermée.*

Preuve.
Soit F un fermé de X. $F \cup \{\hat{x}\}$ est fermé dans $\hat{X}$ (son complémentaire dans $\hat{X}$ est $X \setminus F$, qui est ouvert dans X et donc dans $\hat{X}$). $\hat{X}$ étant compact, $F \cup \{\hat{x}\}$ est donc un compact de $\hat{X}$. Comme $\hat{f}$ est continue (cf. propriété précédente), on en déduit que $\hat{f}(F \cup \{\hat{x}\}) = f(F) \cup \{\hat{y}\}$ est compact dans $\hat{Y}$. Son complémentaire $Y \setminus f(F)$ est donc ouvert dans $\hat{Y}$, comme il ne contient pas $\hat{y}$ c'est aussi un ouvert de Y, d'où on déduit que $f(F)$ est fermé dans Y.

$\square$

Leçons possibles
203 Utilisation de la notion de compacité.
204 Connexité. Exemples et applications.
214 Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.
118 Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.

Références