11 Théorème de Gershgörin

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle disques de Gershgörin les disques fermés du plan complexe $D_i = D^f(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}|)$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$). On appelle domaine de Gershgörin $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^n D_i$.

Proposition. *$Sp(A) \subset \mathcal{G}$ (le spectre d'une matrice est contenu dans son domaine de Gershgörin).*

Preuve.
Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé à λ. Soit $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $|x_i|$ soit maximal, on a $x_i \neq 0$ et $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \lambda x_i$. On en déduit que $a_{ii} - \lambda = \sum_{j \neq i} a_{ij} \frac{x_j}{x_i}$ puis $|a_{ii} - \lambda| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, ce qui prouve que $\lambda \in D_i$.

□

On dit que A est à diagonale strictement dominante si $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pour tout i. Il s'ensuit immédiatement de la proposition ci-dessus qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

Théorème. *Soit $\mathcal{D}$ une composante connexe de $\mathcal{G}$. C'est la réunion des D_i qui la rencontrent : $\mathcal{D} = \bigcup_{i \in I} D_i$. Il y a $\#I$ valeurs propres de A dans $\mathcal{D}$, comptées avec multiplicité.*

Preuve.
On note Δ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de A. Pour $r \in [0, 1]$, on pose $A_r = \Delta + r(A - \Delta)$ et on note $\mathcal{G}_r$ le domaine de Gershgörin de A_r. Remarquons que $A_0 = \Delta$, $A_1 = A$ et que les $\mathcal{G}_r$ croissent de $\mathrm{Sp}(\Delta)$ à $\mathcal{G}$ lorsque r croît de 0 et 1.

Notons $p(r)$ le nombre de valeurs propres de A_r contenues dans $\mathcal{D}$ (comptées avec multiplicité).

Comme $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G} \setminus \mathcal{D}$ sont compacts on peut trouver une courbe de Jordan orientée positivement γ qui sépare $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G} \setminus \mathcal{D}$.

De manière générale, si M est une matrice de valeur propres λ_1, ..., λ_s de multiplicités respectives m_1, ..., m_s, on a $\frac{\chi_M'(z)}{\chi_M(z)} = \sum_{k=1}^s \frac{m_k}{z - \lambda_k}$ (χ_M désigne le polynôme caractéristique de M). On en déduit que le résidu en λ_k de la fonction méromorphe $\frac{\chi_M'}{\chi_M}$ est m_k.

Dans notre cas, en remarquant que les valeurs propres de A_r qui ne sont pas dans $\mathcal{D}$ sont dans $\mathcal{G} \setminus \mathcal{D}$, le théorème des résidus nous permet d'affirmer que $p(r) = \int_\gamma \frac{\chi_r'(z)}{\chi_r(z)} \mathrm{d}z$ (où on a noté χ_r le polynôme caractéristique de A_r).

Il est clair que $r \mapsto \chi_r$ et $r \mapsto \chi_r'$ sont des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ pour la norme « max des coefficients » sur $\mathbb{R}_n[X]$; donc pour toutes les normes en particulier $\|.\|_{\infty,\gamma}$.

Comme χ_r ne s'annule jamais sur l'image de γ, on en déduit que $r \mapsto \frac{\chi_r'(z)}{\chi_r(z)}$ est une application continue pour la norme uniforme. Il s'ensuit que $r \mapsto p(r)$ est une application continue.

Comme p prend des valeurs discrètes, c'est en fait une application constante, en particulier $p(0) = p(1)$. Or il est clair que $p(0) = \#I$, on a donc $\#\mathrm{Sp}(A) \cap \mathcal{D} = \#I$, ce qu'il fallait montrer.

$\square$

Leçons possibles
129 Polynômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs. Applications.
(**126** Endomorphismes diagonalisables.)
(204 Connexité. Exemples et applications)
(**235** Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.)
(**239** Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.)
(**244** Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.)
245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.
(**247** Exemples de problèmes d'interversion de limites.)

Références
[Ser01]