14 Méthode de quadrature élémentaire de Gauss

Théorème. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\omega : I \to \mathbb{R}$ un poids et $l \in \mathbb{N}$. Il existe alors une unique subdivision de I à $l+1$ points $\sigma = (x_0, ..., x_l)$ et une unique famille de réels $(\lambda_0, ..., \lambda_l)$ telle que la méthode élémentaire de quadrature donnée par $\int_I f(x)\omega(x)dx \approx \sum_{j=0}^{l} \lambda_j f(x_j)$ soit d'ordre $\geqslant 2l+1$.*

Cette méthode est d'ordre $2l+1$. De plus, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^{2l+2}$ sur I, il existe $\xi \in I$ tel que $E(f) = \frac{\|\pi_{l+1}\|_{2,\omega}^2}{(2l+2)!} f^{(2l+2)}(\xi)$, où π_{l+1} est le $l+1$-ème polynôme orthogonal associé au poids ω (et on a noté $E(f) = \int_I f(x)\omega(x)dx - \sum_{i=0}^{l} \lambda_i f(x_i)$).

Rappels :

– Un poids $\omega : I \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, partout > 0 et telle que $\int_I |x|^n \omega(x)\mathrm{d}x < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (autrement dit les polynômes sont intégrables pour la mesure $\omega \mathrm{d}x$). En particulier si I est borné toute fonction > 0 intégrable convient.
– Une méthode de quadrature est dite d'ordre $p \in \mathbb{N}$ si elle est exacte pour les polynômes de degrés $\leqslant p$, et inexacte pour au moins un polynôme de degré $p+1$.
– $\mathrm{L}^2(I, \omega \mathrm{d}x)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle_\omega = \int_I f(x)g(x)\omega(x)\mathrm{d}x$.
– On note π_{l+1} le $l+1$-ème polynôme orthogonal associé à ω, c'est-à-dire le polynôme unitaire qui dirige la droite vectorielle de $\mathbb{R}_{l+1}[X]$ orthogonale à $\mathbb{R}_l[X]$ (pour le produit scalaire $\langle ., .\rangle_\omega$).

Preuve du théorème.
On commence par montrer l'unicité : supposons donnés une subdivision σ de I et des scalaires λ_0, ..., λ_l comme dans l'énoncé.

On pose alors $\tilde{\pi}(x) = (x - x_0)...(x - x_n)$. $\tilde{\pi}$ est un polynôme unitaire de degré $l+1$. Soit $P \in \mathbb{R}_l[X]$, $P\tilde{\pi}$ est un polynôme de degré $\leqslant 2l+1$ donc la formule de quadrature est exacte, elle donne $\int_I \tilde{\pi}(x)P(x)\omega(x)\mathrm{d}x = 0$. On vient de montrer que $\tilde{\pi}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_l[X]$, on a donc $\tilde{\pi} = \pi_{l+1}$. Par suite, les x_i sont nécessairement les racines de π_{l+1}.

Soit L_i le i-ème polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la subdivision σ. L_i est de degré l donc la formule de quadrature est exacte pour L_i, elle donne $\int_I L_i(x)\omega(x)\mathrm{d}x = \lambda_i$. Les λ_i sont donc également déterminés sans équivoque.

Réciproquement, vérifions que les points x_i et les scalaires λ_i trouvés ci-dessus conviennent. Il nous faut déjà justifier que π_{l+1} a toutes ses racines dans I et distinctes. Soit $P(x) = \prod_{k \in F}(x - x_k)$, le produit étant pris sur les indices k tels que x_k soit une racine dans I d'ordre impair de π_{l+1}. $P\pi_{l+1}$ est de signe constant dans I, donc $\int_I P(x)\pi_{l+1}(x)\omega(x)\mathrm{d}x \neq 0$.

Comme $\pi_{l+1} \perp_\omega \mathbb{R}_l[X]$, P est nécessairement de degré $l+1$; il s'ensuit que toutes les racines de π_{l+1} sont simples et dans I.

Montrons maintenant que la méthode est d'ordre $\geqslant 2l+1$. On sait déjà qu'elle est exacte pour les L_i, qui forment une base de $\mathbb{R}_l[X]$. La méthode est donc exacte pour tous les polynômes de degrés $\leqslant l$ (autrement dit elle est d'ordre $\geqslant l$).

Soit $p \in \mathbb{R}_{2l+1}[X]$, on effectue la division euclidienne de p par π_{l+1} : $p = q\pi_{l+1} + r$, avec $r = 0$ ou $d^\circ r < l+1$ et $d^\circ q \leqslant l$. On a alors $\int_I p(x)\omega(x)\mathrm{d}x = \int_I q(x)\pi_{l+1}(x)\omega(x)\mathrm{d}x + \int_I r(x)\omega(x)\mathrm{d}x$. Sachant que $\langle q, \pi_{l+1}\rangle_\omega = 0$, que la formule est exacte pour r et que $r(x_i) = p(x_i)$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant l$, il vient $\int_I p(x)\omega(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^n \lambda_i p(x_i)$, ce qui prouve que la formule est exacte pour p. On a donc montré que la méthode est d'ordre $\geqslant 2l+1$.

Reste à montrer que la méthode n'est pas d'ordre $> 2l+1$ et l'estimation de l'erreur annoncée. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{2l+2}$ sur I. L'application $\mathbb{R}_{2l+1}[X] \to \mathbb{R}^{2l+2}$, $P \mapsto (P(x_i), P'(x_i))_{0\leqslant i \leqslant l}$ est linéaire et injective, elle est donc surjective pour des raisons de dimension. Il existe donc un unique polynôme $H \in \mathbb{R}_{2l+1}[X]$ tel que $H(x_i) = f(x_i)$ et $H'(x_i) = f'(x_i)$ pour tout i. On écrit ensuite que $E(f) = \int_I f(x)\omega(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^l \lambda_j f(x_j)$ avec $\sum_{i=0}^l \lambda_j f(x_j) = \sum_{i=0}^l \lambda_j H(x_j) = \int_I H(x)\omega(x)\mathrm{d}x$ puisque la formule est exacte pour H. On a donc $E(f) = \int_I (f(x) - H(x))\omega(x)\mathrm{d}x$.

Soit $x \in I \setminus \{x_0, ..., x_l\}$, on pose $\varphi_x(t) = f(t) - H(t) - k_x(\pi_{l+1}(t))^2$, où k_x est choisi pour que $\varphi_x(x) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle, étant donné que φ_x s'annule en x et en tous les x_i, on trouve $l+1$ points distincts et différents des x_i où φ' s'annule. En rajoutant les x_i, cela fait $2l+2$ points où φ_x' s'annule. Il existe donc un point $c_x \in I$ tel que $\varphi_x^{(2l+2)}(c_x) = 0$ (pour le voir, on applique le théorème de Rolle autant de fois que possible successivement aux dérivées de φ_x). On en déduit que $k_x = \frac{f^{(2l+2)}(c_x)}{(2l+2)!}$, puis $f(x) - H(x) = \frac{f^{(2l+2)}(c_x)}{(2l+2)!}(\pi_{l+1}(x))^2$.

En notant $m = \inf_I f^{(2l+2)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $M = \sup_I f^{(2l+2)} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on a donc $\frac{m}{(2l+2)!}(\pi_{l+1}(x))^2 \leqslant f(x) - H(x) \leqslant \frac{M}{(2l+2)!}(\pi_{l+1}(x))^2$ pour tout $x \in I$ différent des x_i, puis pour tout $x \in I$ par continuité. Il s'ensuit que $\frac{\|\pi_{l+1}\|_{2,\omega}}{(2l+2)!} m \leqslant E(f) \leqslant \frac{\|\pi_{l+1}\|_{2,\omega}}{(2l+2)!} M$, ce qu'on écrit encore $m \leqslant \frac{(2l+2)!}{\|\pi_{l+1}\|_{2,\omega}} E(f) \leqslant M$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi \in I$ tel que $\frac{(2l+2)!}{\|\pi_{l+1}\|_{2,\omega}} E(f) = f^{(2l+2)}(\xi)$. On en déduit l'estimation annoncée : $E(f) = \frac{\|\pi_{l+1}\|_{2,\omega}}{(2l+2)!} f^{(2l+2)}(\xi)$.

En particulier, si $f(x) = x^{2l+2}$, il vient $E(f) = \|\pi_{l+1}\|_{2,\omega} > 0$, ce qui prouve que la méthode est d'ordre exactement $2l+1$. $\square$

Leçons possibles

(**118** Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.)
212 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.
(**233** Intégration des fonctions d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.)
(**236** Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.)
238 Méthodes de calcul approché d'intégrales.
248 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales ou polynômiales par morceaux. Exemples.

Références
[Dem06]
[Pel]