15 Théorème de Hadamard-Lévy

Théorème (Hadamard-Lévy). *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Sont équivalents :*
i) f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$
ii) $f'(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et f est propre.

Preuve.
Le sens $i) \Rightarrow ii)$ est facile : si f est un difféomorphisme, $f'(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et f^{-1} étant continue, elle transforme un compact en un compact.

On s'intéresse maintenant à la réciproque : supposons que $f'(x)$ soit inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et que f soit propre. On montre d'abord que f est surjective. En effet, f est un difféomorphisme local d'après la théorème d'inversion locale, c'est donc une application ouverte. D'autre part, f est propre donc c'est une application fermée. En particulier, l'image de f est ouverte et fermée dans $\mathbb{R}^n$, qui est connexe, et elle est évidemment non vide, on en déduit que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

D'après le théorème d'inversion globale, il nous suffit à présent de montrer que f est injective. **La démonstration que nous proposons sera valable dans le cas où f est de classe** $\mathcal{C}^2$, ce qu'on suppose désormais. Soit donc $y \in \mathbb{R}^n$ et $S = f^{-1}(\{y\})$ la fibre au-dessus de y, on veut montrer que S est réduit à un point. Quitte à considérer la fonction $f - y$, on peut supposer que $y = 0$.

On montre déjà que S est fini. En effet, S est compact car f est propre, s'il était infini il aurait donc un point d'accumulation. Cela contredirait l'injectivité locale de f en ce point (on rappelle que f est un difféomorphisme local).

Reste à montrer que S ne contient qu'un point. Pour cela on introduit le champ de vecteurs V défini sur $\mathbb{R}^n$ par $V(x) = -f'(x)^{-1}.f(x)$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$. On note φ son flot local.

Montrons dans un premier temps que ce flot est défini pour tout $t \geqslant 0$. D'après le principe des majorations *a priori* (théorème de fuite à la frontière), il suffit de montrer que $\varphi_t(x)$ est borné pour $t \geqslant 0$. Pour cela on remarque que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi_t(x)) = f'(\varphi_t(x)).V(\varphi_t(x)) = -f(\varphi_t(x))$. On en déduit que $f(\varphi_t(x)) = e^{-t} f(x)$ qui est borné pour $t \geqslant 0$ (par $|f(x)|$), puis que $\varphi_t(x)$ est borné par propreté de f (on utilise ici le fait que $E = \mathbb{R}^n$ est de dimension finie).

On remarque ensuite que les points $x_1, ..., x_s$ de S sont des points critiques asymptotiquement stables. En effet, fixons $i \in \{1, ..., s\}$, il est clair d'une part que $V(x_i) = 0$. D'autre part, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de x_i (resp. $\mathcal{V}$ de 0) tel que f réalise un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$. Quitte à restreindre, on peut supposer que $\mathcal{V}$ est une boule ouverte. Soit $x \in \mathcal{U}$, on a $e^{-t} f(x) \in \mathcal{V}$ pour tout $t \geqslant 0$ donc la courbe $t \mapsto f_{|\mathcal{U}}^{-1}(e^{-t} f(x))$ est bien définie (et à valeurs dans $\mathcal{U}$), on vérifie de plus immédiatement que c'est (la restriction d') une courbe intégrale. On en conclue par unicité que $\varphi_t(x) = f_{|\mathcal{U}}^{-1}(e^{-t} f(x))$ puis que $\lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) = x_i$ par continuité de $f_{|\mathcal{U}}^{-1}$.

On pose alors $\mathcal{O}_i = \{x \in \mathbb{R}^n, \lim_{t\to+\infty} \varphi_t(x) = x_i\}$. On a déjà montré que O_i est un voisinage de x_i (il contient $\mathcal{U}$). $\mathcal{O}_i$ est en fait un ouvert : c'est une application directe du théorème de continuité par rapport aux conditions initiales. On peut soit préciser cet argument, soit simplement utiliser la continuité de φ_t (qui est un corollaire immédiat du théorème) : on écrit que $\mathcal{O}_i = \{x \in \mathbb{R}^n, \exists t \geqslant 0\ \varphi_t(x) \in \mathcal{U}\} = \bigcup_{t\geqslant 0} \varphi_t^{-1}(\mathcal{U})$ qui est bien un ouvert.

On montre enfin que $\bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{O}_i = \mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a vu que $\varphi_t(x)$ est borné pour $t \geqslant 0$, $\varphi_t(x)$ a donc une valeur d'adhérence qui ne peut être que l'un des x_i par continuité de f (rappelons que $f(\varphi_t(x)) = e^{-t} f(x)$). Or nous avons déjà montré que si $\varphi_t(x)$ se retrouve suffisamment proche de x_i (ce qui est le cas puisque x_i est une valeur d'adhérence), $\varphi_t(x)$ tend vers x_i quand $t \to +\infty$ (c'est la stabilité asymptotique de x_i).

Pour conclure, les $\mathcal{O}_i$ sont des ouverts non vides et évidemment disjoints dont la réunion est $\mathbb{R}^n$, il y en a donc au plus un par connexité de $\mathbb{R}^n$. Ceci prouve que S est réduit à un point et termine la démonstration.

Remarque : On ne s'est pas vraiment servi de la classe $\mathcal{C}^2$ de f, mais seulement du fait que le champ de vecteur V est localement lipschitzien, ce qui est assuré dès que f' est lipschitzienne par exemple.

$\square$

Leçons possibles
204 Connexité. Exemples et applications
211 Utilisation de la dimension finie en analyse.
214 Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.
215 Applications différentiables définies sur un ouvert de Rn. Exemples et applications.

Références
[QZ02] pp392-394.
[Jim].