16 Suites équiréparties modulo 1

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est dite équirépartie si pour tout intervalle ouvert I de S^1, $\dfrac{\#\{1\leqslant k\leqslant n, x_k\in I\}}{n}\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\lambda(I)$.

Quelques précisons : par définition, un intervalle de S^1 est l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par la projection canonique $\pi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $\lambda(I)$ désigne alors la mesure de I vu comme partie de $[0,1[$. Par exemple, un intervalle ouvert I de S^1 est soit un intervalle $]a,b[$ de $[0,1[$ soit la réunion de deux intervalles disjoints $[0,b[$ et $]a,1[$. Dans les deux cas, on note $I=]a,b[$. Il est clair que pour montrer qu'une suite est équirépartie, il suffit de le vérifier sur les « vrais » intervalles de $[0,1[$.

Proposition (Critère de WEYL). *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de S^1. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie.
(ii) $\forall f\in\mathcal{C}(S^1)$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\int_{S^1}f(x)dx$.
(iii) $\forall l\in\mathbb{Z}^*$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2i\pi l x_k}=0$.

Preuve.
« *(i)* ⇒ *(ii)* » : Par définition, la propriété *(ii)* est vérifiée pour les indicatrices d'intervalles, donc pour les fonctions en escalier par linéarité.

Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (autrement dit, à identification près, $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ et f 1-périodique). Soit $\varepsilon>0$. Il existe une fonction en escalier u sur $[0,1[$ telle que $\|f-u\|_{\infty,[0,1[}\leqslant\varepsilon/3$.

Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)-\int_{S^1}f(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-u(x_k)|+\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u(x_k)-\int_0^1u(x)\mathrm{d}x\right|\\ &\quad+\int_0^1|f(x)-u(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Le premier et le troisième terme du membre de droite sont $\leqslant\varepsilon/3$. Comme la propriété *(ii)* est vérifiée pour u, le deuxième terme est aussi $\leqslant\varepsilon/3$ dès que n assez grand. On a donc montré que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\int_{S^1}f(x)\mathrm{d}x$, ce qu'il fallait.

On remarquera que cette preuve s'applique sans problème aux fonctions réglées et même aux fonctions RIEMANN-intégrables.

« *(ii)* ⇒ *(iii)* » : C'est évident, il suffit de prendre $f:x\mapsto e^{2i\pi lx}$.

« $(iii) \Rightarrow (ii)$ » : Par définition, (ii) est vérifiée pour les fonctions $x \mapsto e^{2i\pi lx}$ pour $l \in \mathbb{Z}^*$, mais aussi pour $l = 0$ (c'est évident). Par linéarité, (ii) est vérifiée pour les polynômes trigonométriques. D'après le théorème de Féjer, f est limite uniforme de polynômes trigonométriques. On reprend alors mot pour mot la preuve de $(i) \Rightarrow (ii)$.

« $(ii) \Rightarrow (i)$ » : il s'agit de montrer que (ii) est vérifiée pour les indicatrices d'intervalles. Il suffit de le montrer pour une indicatrice de la forme $u : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant c \\ 1 \text{ si } c < x < 1 \end{cases}$ (avec $0 < c < 1$, car une indicatrice d'intervalle est une combinaison linéaire (une différence en fait) de telles fonctions.

$c - \varepsilon$ c

ATTENTION g et h ne sont pas dans $\mathcal{C}(S^1)$. Il faut se ramener à $u = \mathbf{1}_{]c,d[}$ et « symétriser » les fonctions du dessin.

Soit $\varepsilon > 0$ et g, h deux fonctions telles que $g \leqslant u \leqslant h$ comme sur le dessin. On a alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(x_k) - \int_0^1 u \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u(x_k) - \int_0^1 u \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_0^1 u$$

Comme g et h sont continues, (ii) est vérifiée pour g et h si bien qu'en passant à la limite (inférieure et supérieure) on obtient

$$\int_0^1 (g - u) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u(x_k) - \int_0^1 u \right) \leqslant \limsup_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u(x_k) - \int_0^1 u \right) \leqslant \int_0^1 (f - u)$$

soit encore

$$-\varepsilon/2 \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u(x_k) - \int_0^1 u \right) \leqslant \limsup_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u(x_k) - \int_0^1 u \right) \leqslant \varepsilon/2$$

Comme ceci est vrai $\forall \varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\liminf_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u(x_k)-\int_0^1 u\right)=\limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u(x_k)-\int_0^1 u\right)=0$$

ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u(x_k)-\int_0^1 u\right)=0$. □

A rajouter : $(x+\alpha n)_{n\geqslant 0}$ équirépartie mod 1 ssi $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $\log(n)$ pas équirépartie mod 1 comme application de la formule d'euler mac laurin à l'ordre 1.

Leçons possibles
202 Exemples de parties denses et applications.
223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.
224 Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
(**233** Intégration des fonctions d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.)
(**235** Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.)
238 Méthodes de calcul approché d'intégrales.
(**247** Exemples de problèmes d'interversion de limites.)

Références
alessandri ?