21 Fonctions lipschitziennes

Théorème. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement s'il existe une fonction $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\,dt$.*

Preuve.
Il est clair que s'il existe une fonction $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ comme dans l'énoncé, alors f est lipschitzienne : dans ce cas $|f(x) - f(y)| \leqslant \int_x^y |g(t)|\mathrm{d}t \leqslant \|g\|_\infty |x-y|$. Étudions maintenant la réciproque.

On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact. Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi'$ (en fait, T est par définition la dérivée de f au sens des distributions). Montrons que T se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$:

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On peut écrire que $\langle T, \varphi\rangle = -\lim\limits_{h\to 0} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \mathrm{d}x$ car la convergence de $\dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ vers $\varphi'(x)$ est uniforme en x, grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange : $\left|\dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \varphi'(x)\right| \leqslant \|\varphi''\|_\infty h$. Après un découpage, changement de variable affine $x \leftarrow x + h$ puis recollage, il vient $\langle T, \varphi\rangle = -\lim\limits_{h\to 0} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \varphi(x)\mathrm{d}x$. On en déduit que $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant L\|\varphi\|_1$, où L est la constante de Lipschitz de f. Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on en déduit que T se prolonge en une unique forme linéaire (encore notée T) sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, dont la norme subordonnée reste $\leqslant L$.

Dans ce qui suit, nous allons reprendre la preuve de $\left(\mathrm{L}^1(\mathbb{R})\right)' = \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, adaptée à notre situation.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a $\mathrm{L}^2([-n,n]) \hookrightarrow \mathrm{L}^1([-n,n]) \hookrightarrow \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, où les injections sont continues. La première injection est une conséquence directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La seconde injection consiste simplement à prolonger une fonction par 0 en dehors de $[-n,n]$. On en déduit que T induit par restriction une forme linéaire continue sur $\mathrm{L}^2([-n,n])$. Par le théorème de représentation de Riesz ($\mathrm{L}^2([-n,n])$ étant un espace de Hilbert), il existe une unique fonction $g_n \in \mathrm{L}^2([-n,n])$ telle que $\forall \varphi \in \mathrm{L}^2([-n,n])$, $\langle T, \varphi\rangle = \int_{[-n,n]} g_n \varphi$. Par unicité dans le théorème de Riesz et parce que $\mathrm{L}^2([-n,n]) \hookrightarrow \mathrm{L}^2([-(n+1), n+1])$, on a $g_{n+1|[-n,n]} = g_n$. On peut donc définir une unique fonction g presque partout sur $\mathbb{R}$ par $g_{|[-n,n]} = g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons que $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$: si ça n'était pas le cas, alors l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}, |g(x)| > L\}$ serait de mesure > 0. Comme A est limite croissante des ensembles $A_n = A \cap [-n,n]$, A_n est de mesure > 0 à partir d'un certain rang N (par continuité à gauche de la mesure). Soit u à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $|g| = ug$ (une telle fonction existe et est mesurable) et posons $\varphi = u\mathbf{1}_{A_N} \in \mathrm{L}^2([-N,N])$. On a $\langle T, \varphi\rangle = \int_{[-N,N]} ug\mathbf{1}_{A_N} = \int_{A_N} |g|$, on en déduit que $\langle T, \varphi\rangle > L\lambda(A_N)$ soit $\langle T, \varphi\rangle > L\|\varphi\|_1$, ce qui contredit le fait que T est une forme linéaire continue sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ de norme $\leqslant L$.

Posons $G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$. G est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (car $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$). Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$-\int_{\mathbb{R}} G(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0}\int_{x}^{0} g(t)\varphi'(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x - \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{x} g(t)\varphi'(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

On peut appliquer le théorème de FUBINI : par exemple pour la première intégrale, $(t,x) \mapsto g(t)\varphi'(x)\mathbf{1}_{\{x\leqslant t\leqslant 0\}}$ est bornée et nulle en dehors du compact $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathrm{Supp}\varphi, x \leqslant t \leqslant 0\}$. On écrit donc

$$-\int_{\mathbb{R}} G(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{t} g(t)\varphi'(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{0}^{+\infty}\int_{t}^{+\infty} g(t)\varphi'(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

Sachant que $\int_{-\infty}^{t} \varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_{t}^{+\infty} \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(t)$ et en se rappelant que $\varphi \in \mathrm{L}^2([-n,n])$ pour un certain n, il vient

$$-\int_{\mathbb{R}} G(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \langle T, \varphi\rangle$$

d'où, quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} (f-G)(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t = 0$$

La dérivée au sens des distributions de $f - G$ étant nulle (c'est, par définition, ce que dit l'égalité précédente), $f - G$ est une fonction constante presque partout, ce qu'on admet. Comme il s'agit de fonctions continues, on peut écrire que $f(x) = f(0) + (G(x) - G(0))$ pour tout réel x, soit $f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

□

On peut remarquer que l'on a montré l'unicité (à équivalence presque partout près) de la fonction g.

On peut ici montrer ce qui a été admis, à savoir que si $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ est telle que $f' = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors f est constante (presque partout). D'après l'injection de $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, qui est classique, cela revient à montrer que $\int_{\mathbb{R}} f\varphi = C\int_{\mathbb{R}}\varphi$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (où C est une constante à déterminer). Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\int_{\mathbb{R}}\theta = 1$, posons $\psi = \varphi - (\int_{\mathbb{R}}\varphi)\theta$. On a $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}}\psi = 0$, si bien que $x \mapsto \xi(x) = \int_{-\infty}^{x}\psi$ est élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On peut donc écrire que $\int_{\mathbb{R}} f\psi = -\int_{\mathbb{R}} f\xi' = 0$, si bien que $\int_{\mathbb{R}} f\varphi = \int_{\mathbb{R}} f\theta\int_{\mathbb{R}}\varphi$, ce qu'on voulait.

Enfin, montrons rapidement l'injection de $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f\varphi = 0\ \forall \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il s'agit de montrer que $f \overset{\text{p.p.}}{=} 0$. Pour cela, il suffit de montrer que $f \overset{\text{p.p.}}{=} 0$ sur chaque intervalle $[-n,n]$ ($n \in \mathbb{N}^*$), une réunion dénombrable d'ensembles négligeables étant négligeable. Fixons donc $n \in \mathbb{N}^*$, et soit θ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta \equiv 1$ sur $[-n,n]$. Soit $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. On a $(f\theta) * \rho_k \xrightarrow{k\to+\infty} f\theta$ dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. D'autre part, à x fixé, $[(f\theta) * \rho_k](x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)[\varphi(y)\rho_k(x-y)]\mathrm{d}y = 0$ car $y \mapsto \varphi(y)\rho_k(x-y)$ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On en déduit que $f\theta \overset{\text{p.p.}}{=} 0$, en particulier $f \overset{\text{p.p.}}{=} 0$ sur $[-n, n]$, ce qu'il fallait.

Leçons possibles
201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.
(**202** Exemples de parties denses et applications.)
207 Prolongement de fonctions. Applications.
(**209** Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.)
210 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.
228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
234 Espaces L^p
((**235** Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.))

Références
brézis, hirsh-lacombe