22 Étude d'un système dynamique discret et de son équivalent continu

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) \in]-1, 0[$ et $-x < f(x) < 0 \ \forall x \in]0,1[$.

On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in]0,1[$ et $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$. Il est immédiat qu'une telle suite est bien définie.

Proposition.
(i) $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
(ii) Pour n *suffisamment grand,* $\exists! \varphi(n) \in \mathbb{N}$ *tel que* $x_{\varphi(n)+1} \leqslant \frac{1}{n} < x_{\varphi(n)}$.
(iii) $\varphi(n) \sim C \log n$ *quand* $n \to +\infty$ *(où* C *est une constante* > 0*).*

Preuve.
Il est clair que la suite (x_n) est strictement décroissante et minorée par 0. Elle a donc une limite l qui doit vérifier $0 \leqslant l < x_0$ et $f(l) = l$, bref $l = 0$, d'où le point (i).

Pour le point (ii), il suffit de remarquer que si n est assez grand pour que $\frac{1}{n} < x_0$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, x_k > \frac{1}{n}\}$ est non vide et fini, on prend alors pour $\varphi(n)$ son plus grand élément. L'unicité est immédiate par stricte décroissance de la suite.

Enfin, on écrit que $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{f(x_n)}{x_n}$, donc $\frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + f'(0)$. On en déduit que $\log(x_{n+1}) - \log(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \log(1 + f'(0))$. Notons $\alpha = -\log(1 + f'(0)) > 0$. Par le théorème de Cesàro, $\log(x_n) \sim -n\alpha$ quand $n \to +\infty$. Par le point (ii), on a $\log(x_{\varphi(n)+1}) \leqslant -\log(n) < \log(x_{\varphi(n)})$ dès que n est assez grand. Puisque $\log(x_{\varphi(n)+1}) \sim \log(x_{\varphi(n)}) \sim -\alpha\varphi(n)$ quand $n \to +\infty$, on a $\log(n) \sim \alpha\varphi(n)$, d'où le résultat avec $C = \frac{1}{\alpha}$.

$\square$

On considère maintenant l'équation différentielle ordinaire $\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ pour $x_0 \in]0,1[$. Nous montrerons que cette E.D.O. admet une unique solution globale x.

Proposition.
(i) $x(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
(ii) Pour n *suffisamment grand,* $\exists! t_n > 0$ *tel que* $x(t_n) = \frac{1}{n}$.
(iii) $t_n \sim C \log n$ *quand* $n \to +\infty$ *(où* C *est une constante* > 0*).*

Preuve.
Commençons par montrer que l'équation différentielle admet une solution globale. On prolonge f (de manière affine) en une fonction $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. L'équation différentielle ordinaire $\begin{cases} x' = \tilde{f}(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution globale d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ global ($\tilde{f}$ est globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$). De plus, 0 et 1 étant des points critiques de $\tilde{f}$, cette solution ne sort pas de $]0,1[$ (par unicité dans le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ). x est donc l'unique solution maximale de l'équation différentielle initiale, et c'est une solution globale.

De plus, x est strictement décroissante (car $f' < 0$ sur $]0,1[$), x a donc une limite $l \in [0, x_0[$ quand $t \to +\infty$. Pour $t > 0$, il existe $c_t \in]t, t+1[$ tel que $x(t+1) - x(t) = f(x(c_t))$ (théorème des accroissements finis). En prenant la limite quand $t \to +\infty$, on obtient $0 = f(l)$. On en déduit que $l = 0$, et le point (i) est montré.

Par continuité et stricte décroissance de x vers 0, il est clair que dès que $\frac{1}{n} < x_0$, $\exists! t_n > 0$ tel que $x(t_n) = \frac{1}{n}$, d'où le point (ii).

Enfin, $x'(t) = f(x(t)) \sim f'(0)x(t)$ quand $t \to +\infty$. On en déduit que $\frac{\mathrm{d}x}{x} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} f'(0)$. Par comparaison des intégrales, on obtient $\log(x(t)) \sim f'(0)t$ quand $t \to +\infty$, en particulier (pour $t = t_n$) $-\log n \sim f'(0)t_n$, d'où le point (iii). □

Notons que la constante C n'est pas la même dans le cas discret et dans le cas continu.

Leçons possibles
220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.
222 Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.
223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.
224 Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
227 Développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.

Références
Francinou X-ENS