23 Méthode de Laplace

Soit $I = [a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a < b \leqslant +\infty$. On se donne une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ mesurable, continue en a avec $f(a) \neq 0$. On suppose de plus que $x \mapsto e^{-t_0\varphi(x)}f(x)$ est intégrable sur I pour un certain $t_0 \in \mathbb{R}$. On cherche un équivalent quand $t \to +\infty$ de $F(t) = \int_I e^{-t\varphi(x)}f(x)\mathrm{d}x$.

1. Si $a = 0$ et $\varphi(x) = x$, alors $F(t) \overset{t\to+\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t}$.
2. Si $\varphi' > 0$ sur I, alors $F(t) \overset{t\to+\infty}{\sim} \frac{f(a)}{\varphi'(a)}\frac{e^{-t\varphi(a)}}{t}$.
3. Si $a = 0$ et $\varphi(x) = x^2$, alors $F(t) \overset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{f(0)}{\sqrt{t}}$.
4. Si $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, alors $F(t) \overset{t\to+\infty}{\sim} f(a)\sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\frac{e^{-t\varphi(a)}}{\sqrt{t}}$.

On donnera l'application suivante (5.) : $\Gamma(t+1) \overset{t\to+\infty}{\sim} t^t e^{-t}\sqrt{2\pi t}$, d'où on déduit en particulier la formule de Stirling $n! \overset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Preuve.
On commence par remarquer que $F(t)$ existe pour $t \geqslant t_0$, puisque $|e^{-t\varphi}f(x)| \leqslant e^{-(t-t_0)\varphi(a)}|e^{-t_0\varphi(x)}f(x)|$ pour $t \geqslant t_0$ (dans tous les cas considérés, φ est strictement croissante sur I). De plus, une application directe du théorème de continuité des intégrales à paramètre donne que F est une fonction continue de t pour $t \geqslant t_0$. En fait, on ne perd pas de généralité à supposer que $t_0 = 0$, quitte à remplacer t par $t - t_0$ et f par $e^{-t_0\varphi}f$.

Traitons maintenant le cas 1. Comme f est continue en 0, f est bornée au voisinage de 0 : on écrit que $|f(x)| \leqslant M$ pour $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ ($M > 0$, $0 < \alpha < b$). On a d'une part $\int_0^\alpha e^{-tx}f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int_0^{t\alpha} e^{-u}f(u/t)\mathrm{d}u$ avec $\int_0^{t\alpha} e^{-u}f(u/t)\mathrm{d}u \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$ par convergence dominée, d'autre part $|\int_\alpha^\beta e^{-tx}f(x)\mathrm{d}x| \leqslant e^{-t\alpha}\int_0^b |f(x)|\mathrm{d}x = \mathrm{O}(e^{-t\alpha})$. En recollant, on obtient bien $F(t) \overset{t\to+\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t}$.

Pour le cas 2., on écrit que le changement de variable $x \mapsto \varphi(x) - \varphi(a)$ est un difféomorphisme de $[a,b[$ sur un intervalle $[0,c[$. Soit ψ le difféomorphisme réciproque. Il vient $F(t) = e^{-t\varphi(a)}\int_0^c e^{-ty}f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y$. Le cas 1. s'applique, sachant que $\psi(0) = a$ et $\psi'(0) = \frac{1}{\varphi'(a)}$ on a bien $F(t) \overset{t\to+\infty}{\sim} \frac{f(a)}{\varphi'(a)}\frac{e^{-t\varphi(a)}}{t}$.

Dans le cas 3., on reprend la méthode du cas 1 : $\int_0^\alpha e^{-tx^2}f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{\sqrt{t}\alpha} e^{-u^2}f(u/\sqrt{t})\mathrm{d}u$. Par convergence dominée, $\sqrt{t}\int_0^\alpha e^{-tx^2}f(x)\mathrm{d}x \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0)$. D'autre part, $\left|\int_\alpha^\beta e^{-tx^2}f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant e^{-t\alpha^2}\int_0^b |f(x)|\mathrm{d}x = \mathrm{O}(e^{-t\alpha^2})$. Finalement $F(t) \overset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{f(0)}{\sqrt{t}}$.

Enfin, dans le cas 4. on écrit que $x \mapsto y = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(y)}$ est un difféomorphisme de $[a,b[$ sur un intervalle $[0,c[$, avec $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{|x=a} = \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}}$. Soit ψ l'application réciproque. On a $F(t) = e^{-t\varphi(a)} \int_0^c e^{-ty^2} f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y$, d'après le cas 3. il vient $F(t) \overset{t\to+\infty}{\sim} f(a)\sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\frac{e^{-t\varphi(a)}}{\sqrt{t}}$, sachant que $\psi(0) = a$ et $\psi'(0) = \sqrt{\frac{2}{\varphi''(a)}}$.

Passons maintenant à l'application. On écrit que $\Gamma(t+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^t\mathrm{d}x$, après le changement de variable $x = t(u+1)$: $\Gamma(t+1) = \int_{-1}^\infty e^{-t(u+1)}(t(u+1))^t t\mathrm{d}u = t^{t+1}\int_{-1}^\infty e^{-t\varphi(u)}\mathrm{d}u$, où $\varphi(u) = 1 + u - \log(1+u)$.

On coupe l'intégrale en deux et on écrit $\int_0^\infty e^{-t\varphi(u)}\mathrm{d}u \overset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ et $\int_{-1}^0 e^{-t\varphi(u)}\mathrm{d}u = \int_0^1 e^{-t\varphi(-u)}\mathrm{d}u \overset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ (dans les deux cas, c'est une application directe du cas 4.). Finalement, $\Gamma(t+1) \overset{t\to+\infty}{\sim} t^t e^{-t}\sqrt{2\pi t}$, ce qu'on voulait.

$\square$

Leçons possibles
227 Développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.
(**233** Intégration des fonctions d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.)
235 Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.
(**236** Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.)
237 Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
(**247** Exemples de problèmes d'interversion de limites.)

Références
[Rou03] pp.341 et suivantes.