24 Sous-espaces fermés de L^p

Théorème (Grothendieck). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie. On se place dans $\mathrm{L}^p = \mathrm{L}^p(\mu)$ avec $1 < p < +\infty$. Si F est un sous-espace fermé de L^p et $F \subset \mathrm{L}^\infty$, alors $\dim_{\mathbb{C}} F < +\infty$.*

Preuve.
On commence par remarquer que l'injection canonique $(F, \|.\|_p) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty$ est continue grâce au théorème du graphe fermé. Celui-ci s'applique car $(F, \|.\|_p)$ et L^∞ sont des espaces de Banach. Supposons que $f_n \in F \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans L^p et $f_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ dans L^∞. On peut extraire une sous-suite de (f_n) qui converge vers f presque partout. On en déduit que $f \overset{\text{p.p.}}{=} g$, ce qu'il fallait.

Comme on aussi une injection continue $\mathrm{L}^\infty \hookrightarrow \mathrm{L}^p$ (car Ω est de mesure finie), on en déduit que les normes $\|.\|_p$ et $\|.\|_\infty$ sont (fortement) équivalentes sur F.

Montrons maintenant que $F \subset \mathrm{L}^2$ et que l'injection canonique $(F, \|.\|_2) \hookrightarrow \mathrm{L}^p$ est continue. Si $p < 2$, c'est clair (Ω est de mesure finie). Si $p > 2$, on a toujours $F \subset L^2$ (car $\mathrm{L}^\infty \subset \mathrm{L}^2$). On écrit ensuite que (pour $f \in F$) $\|f\|_p{}^p = \int_\Omega |f|^{p-2}|f|^2$ d'où $\|f\|_p{}^p \leqslant \|f\|_\infty{}^{p-2}\|f\|_2{}^2$. On sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_2$. Finalement, $\|f\|_p \leqslant C^{\frac{p-2}{p}}\|f\|_2$, d'où le résultat.

Si F est de dimension $\geqslant n$ (sur $\mathbb{C}$), il existe une famille f_1, ..., f_n orthonormale (pour L^2). On note B la boule unité de $\mathbb{C}^n$ pour la norme $\|.\|_2$. Pour $c = (c_1, ..., c_n) \in B$, on pose $f_c = \sum_{i=1}^n c_i f_i$. Remarquons que $\|f_c\|_2 \leqslant 1$.

Sachant que B est séparable, soit $(c_k)_{k\geqslant 1}$ une suite dense dans B. Pour chaque k, il existe une partie (mesurable) de mesure totale Ω_k telle que $\|f_{c_k}\| = \sup_{\Omega_k} |f_{c_k}|$ (et non pas « sup essentiel »). $\Omega' = \bigcap_k \Omega_k$ est encore une partie mesurable de mesure totale vérifiant la propriété précédente ($\forall k$). Alors $\forall x \in \Omega'$, $|f_{c_k}(x)| \leqslant \|f_{c_k}\|_\infty$, et comme $(F, \|.\|_\infty) \hookrightarrow (F, \|.\|_p) \hookrightarrow (F, \|.\|_2)$, $|f_{c_k}(x)| \leqslant \alpha$ où α est une constante > 0. Par densité, il s'ensuit immédiatement que $|f_c(x)| \leqslant \alpha$ pour tout $c \in B$ et pour tout $x \in \Omega'$.

Posons maintenant $c(x) = \begin{cases} \frac{(\bar{f}_1(x), ..., \bar{f}_n(x))}{\|(f_1(x), ..., f_n(x))\|_2} & \text{si } \exists i, f_i(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, ceci pour $x \in \Omega'$. Il vient alors $f_{c(x)}(x)^2 = \sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2$. D'après ce qui précède, on a donc $\sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2 \leqslant \alpha^2$. En intégrant sur Ω', il vient $n \leqslant \alpha^2 \mu(\Omega)$; F est donc de dimension finie.

$\square$

Leçons possibles
201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.
(**202** Exemples de parties denses et applications.)
205 Espaces complets. Exemples et applications.
209 Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.
210 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.
212 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.
234 Espaces L^p.

Références
Rudin ANAF