25 Théorème de stabilité de Liapounov

Théorème (Liapounov). *On considère l'équation différentielle (E) : $x' = f(x)$, où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que a est un point de U tel que $f(a) = 0$ et les valeurs propres de $f'(a)$ sont toutes de partie réelle < 0.*

Les solutions de (E) ont même comportement asymptotique au voisinage de a que celles de l'équation linéarisée (L) : $x' = f'(a)(x - a)$: a est un point d'équilibre exponentiellement attractif de (E) et (L).

Nous verrons au passage que les solutions de (E) sont globales dès que la donnée initiale est suffisamment proche de a.

Preuve.
Quitte à translater, on peut supposer $a = 0$. Dans la suite, on notera $A = f'(0)$ et λ_1, ..., λ_r les valeurs propres de A (comptées sans multiplicité). On notera aussi $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $x_0 \in U$, notons $y(t)$ l'unique solution maximale de (E) telle que $y(0) = x_0$ (donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz) et $z(t)$ l'unique solution globale de (L) avec même condition initiale (donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire). On sait que $z(t) = e^{tA}x_0$.

Lemme. $\forall t \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \|e^{tA}x\| \leqslant C(1 + |t|)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{r} e^{t\mathrm{Re}\lambda_i}\right) \|x\|$, où C est une constante > 0. En particulier, si α est un réel > 0 tel que $a < \min -\mathrm{Re}\lambda_i$, alors $\|e^{tA}x\| \leqslant e^{-\alpha t}\|x\|$ quand t est voisin de $+\infty$.

On écrit $x = x_1 + ... + x_r$, où x_i est dans le sous-espace caractéristique de A associé à la valeur propre λ_i. Il vient $e^{tA}x_i = e^{t\lambda_i}e^{t(A-\lambda_i)}x_i$ puis $e^{tA}x_i = e^{t\lambda_i}\left(\sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{(A-\lambda_i)^k}{k!}t^k\right)x_i$, où m_i est la multiplicité de λ_i. On donc peut trouver une constante $C_i > 0$ telle que $\|e^{tA}x_i\| \leqslant C_i(1 + |t|)^{n-1}e^{t\mathrm{Re}\lambda_i}\|x_i\|$. En « recollant », il vient $\|e^{tA}x\| \leqslant (\max C_i)(1 + |t|)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{r} e^{t\mathrm{Re}\lambda_i}\right) \max \|x_i\|$. On conclut par l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$. La deuxième assertion s'ensuit immédiatement de la première.

Une première conséquence (immédiate) de ce lemme est que $z(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand $t \to +\infty$. On voudrait montrer que c'est également le cas de $y(t)$ pourvu que x_0 soit assez proche de a.

Posons $b(x, x') = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}x'\rangle \mathrm{d}t$ pour x, $x' \in \mathbb{R}^n$. Cette intégrale est (absolument) convergente grâce au lemme précédent. b est une forme bilinéaire symétrique, de plus b est définie positive. En effet, si $q(x) = 0$ (où on a noté $q(x) = b(x, x)$) ; alors $\int_0^{+\infty} \|e^{tA}x\|^2 \mathrm{d}t = 0$. La fonction sous l'intégrale étant continue, on doit avoir $e^{tA}x = 0$ $\forall t$ et donc $x = 0$ (prendre $t = 0$). q est appelée fonction de Liapounov. Nous allons étudier le comportement de $q(y(t))$.

On a $q(y(t))' = 2b(y(t), y'(t))$ soit $q(y(t))' = 2b(y(t), Ay(t)) + 2b(y(t), r(y(t)))$ où on a noté $f(x) = Ax + r(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. D'une part, $b(y(t), r(y(t))) \leqslant \|y(t)\|_b \|r(y(t))\|_b$, où $\|.\|_b = \sqrt{q}$ est la norme euclidienne associée à b (inégalité de Cauchy-Schwarz). D'autre part, on a pour $x \in \mathbb{R}^n$ $2b(x, Ax) = \int_0^{+\infty} 2\langle e^{tA}x, e^{tA}Ax\rangle \mathrm{d}t$. La fonction sous l'intégrale étant la dérivée de $t \mapsto \|e^{tA}x\|^2$, il vient $2b(x, Ax) = -\|x\|^2$ puis $2b(x, Ax) \leqslant Mq(x)$, où M est une constante > 0 donnée par l'équivalence des normes. Ainsi $q(y(t))' \leqslant -Mq(y(t)) + \|y(t)\|_b \|r(y(t))\|_b$. Par définition de la différentiabilité de f en 0 (qui ne dépend pas de la norme choisie), il existe $\eta > 0$ tel que $\|x\|_b \leqslant \eta \Rightarrow \|r(x)\|_b \leqslant \frac{M}{2}\|x\|_b$. Ainsi $q(y(t))' \leqslant -\frac{M}{2}q(y(t))$ dès que $\|y(t)\|_b \leqslant \eta$.

Supposons maintenant que l'on a pris $\|x_0\|_b < \eta$. Alors $\|y(t)\|_b < \eta$ $\forall t > 0$. En effet, sinon il existe un plus petit temps t_1 tel que $\|y(t_1)\|_b = \eta$, or $\|y(t)\|_b$ décroît avec t au voisinage de t_1 : ceci contredit la minimalité de t_1. On en déduit que $y(t)$ reste dans $B_b(0, \eta)$ $\forall t > 0$. D'après le théorème de fuite à la frontière (ou « explosion en temps fini »), y est une solution globale (définie $\forall t > 0$). De plus, l'inégalité $q(y(t))' \leqslant -\frac{M}{2}q(y(t))$ s'intègre en $q(y(t)) \leqslant e^{-\frac{M}{2}t}$, ce qui prouve que $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand $t \to +\infty$. □

On peut remarquer que l'on a seulement eu besoin que f soit localement lipschitzienne au voisinage de a et différentiable en a.

Leçons possibles
((**124** Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.))
127 Exponentielle de matrices. Applications.
(**211** Utilisation de la dimension finie en analyse.)
215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.
221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
(**222** Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.)

Références
[Rou03]