Algèbre 07 – Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E ; sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

1. Sous-groupes remarquables du groupe linéaire

Définition. Le *groupe linéaire* $GL(E)$ de E est le groupe des endomorphismes inversibles de $\mathcal{L}(E)$.

On identifie $GL(E)$ avec le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles *i.e.* de déterminant non nul.

Remarques. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors
– $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
– $A \mapsto A^{-1}$ et $(A, B) \mapsto AB$ sont continues.

Application. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Remarque. $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs mais $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Définition. On appelle *groupe spécial linéaire* de E et on note $SL(E)$ le noyau de det : $GL(E) \to \mathbb{K}^*$ *i.e.* le groupe des endomorphismes de E de déterminant 1.

On identifie $SL(E)$ avec le groupe $SL_n(\mathbb{K})$ des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de déterminant 1.

Remarque. La suite $1 \to SL_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^* \to 1$ est exacte et on a $GL_n(\mathbb{K}) \simeq SL_n(\mathbb{K}) \rtimes \mathbb{K}^*$.

Définition. On appelle respectivement groupes *orthogonal*, *spécial orthogonal*, *unitaire* et *spécial unitaire*, les groupes
– $\mathcal{O}(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R})\ ;\ {}^tA = A^{-1}\}$,
– $\mathcal{SO}(n) = \{A \in \mathcal{O}(n)\ ;\ \det A = 1\}$,
– $\mathcal{U}(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C})\ ;\ A^* = A^{-1}\}$ et
– $\mathcal{SU}(n) = \{A \in \mathcal{U}(n)\ ;\ \det A = 1\}$.

Remarque. $\mathcal{O}(n)$ et $\mathcal{U}(n)$ sont compacts mais pas $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C});\ {}^tA = A^{-1}\}$.

Proposition. *Si $A \in \mathcal{O}(n)$ alors il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et $0 < \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_r < \pi$ tels que*

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\mathrm{I}_p, -\mathrm{I}_q, R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_r})$$

où $R_{\theta_j} = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & \sin\theta_j \\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix}$.

Application. $\mathcal{O}(n)$ a deux composantes connexes : $\mathcal{SO}(n)$ et $\mathcal{O}^-(n)$.

Proposition. *Si $A \in \mathcal{U}(n)$ alors il existe $P \in \mathcal{U}(n)$ telle que $P^*AP = \operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})$.*

Application. $\mathcal{U}(n)$ et $\mathcal{SU}(n)$ sont connexes par arcs.

Théorème de Burnside-Schur. *Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ alors :*
G fini $\iff$ G d'exposant fini
$\iff$ G de torsion et de type fini

Exemple. Si G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant 2 alors il existe $k \leq n$ tel que $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$.

Application. Si $GL_n(\mathbb{C}) \simeq GL_m(\mathbb{C})$ alors $n = m$.

2. Générateurs et centre

Définition. Soit $f \in GL(E)$ avec $f \neq \mathrm{id}_E$ et H un hyperplan de E stable f avec $f_{|H} = \mathrm{id}_H$. On dit que f est une *dilatation* d'hyperplan H et de rapport $\lambda \neq 1$ s'il existe une base dans laquelle la matrice de f soit $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \lambda)$.

Proposition. *Deux dilatations sont conjuguées dans $GL(E)$ si et seulement si elles ont même rapport.*

Définition. Soit $f \in GL(E)$ avec $f \neq \mathrm{id}_E$ et $H = \ker\psi$ un hyperplan de E stable f avec $f_{|H} = \mathrm{id}_H$. On dit que f est une *transvection* d'hyperplan H et de droite $\langle a\rangle$ s'il existe une base dans laquelle la matrice de f soit $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$ *i.e.* si $f(x) = x + \psi(x)a$ pour tout $x \in E$.

Exemple. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est une matrice de transvection.

Proposition. *Deux transvections sont conjuguées dans $GL(E)$ et, si $n \geq 3$, sont conjuguées dans $SL(E)$.*

Remarque. $\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont conjuguées dans $SL_2(\mathbb{K})$ si et seulement si $\lambda\mu^{-1}$ est un carré de $\mathbb{K}$

Application. $Z(GL(E))$ est l'ensemble des homothéties de rapport $\lambda \in \mathbb{K}^*$; $Z(SL(E))$ est celui des homothéties de rapport une racine $n^{\text{è}}$ de l'unité dans $\mathbb{K}$.

Remarque. Notons $PGL(E) = GL(E)/Z(GL(E))$ et $PSL(E) = SL(E)/Z(SL(E))$; si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos alors $PGL(E) \simeq PSL(E)$

Théorème. *Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ s'écrit sous la forme $A = \tau_1 \cdots \tau_q \delta \tau_1 \cdots \tau_s$ où les τ_i sont des transvections et δ est une dilatation de rapport* $\det A$.

Corollaire. *Les transvections engendrent $SL(E)$.*
Les transvections et les dilatations engendrent $GL(E)$.

Application. $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes : $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \det A > 0\}$ et $GL_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \det A < 0\}$. De plus, $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.

Proposition. $D(GL(E)) = D(SL(E)) = SL(E)$ *sauf* $D(GL(\mathbb{F}_2^2)) = D(SL(\mathbb{F}_2^2)) \simeq \mathcal{A}_3$ *et* $D(SL(\mathbb{F}_3^2)) \simeq \mathbb{H}_8$

Application. $PSL(E)$ est simple si $E \neq \mathbb{F}_2^2$ et $\mathbb{F}_3^2$.

3. Le groupe orthogonal

Proposition (décomposition polaire). *L'application*

$$\mathcal{O}(n) \times \mathrm{Sym}^{++}(n) \to GL_n(\mathbb{R}), (O, S) \mapsto OS$$

est un homéomorphisme.

On a un résultat analogue pour $(O, S) \mapsto SO$. La décomposition persiste sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ mais sans l'unicité.

Application. $\mathcal{O}(n)$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$.

Application. Deux matrices unitairement semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonalement semblables.

Application. L'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée (pour la norme $\| \|_2$ induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$).

Corollaire. *Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe Ω_1, Ω_2 dans $\mathcal{O}(n)$ et D diagonale à coefficients strictement positifs telles que $A = \Omega_1 D \Omega_2$.*

Application. $d(M, \mathcal{O}(n)) = \left\| \sqrt{{}^tMM} - \mathrm{I} \right\|_2$

Proposition. $Z(\mathcal{O}(n)) = \{\pm \mathrm{I}\}$
$Z(\mathcal{SO}(n)) = \{\pm \mathrm{I}\}$ *si n est pair et* $\{\mathrm{I}\}$ *si n est impair*

Remarque. $\mathcal{SO}(2) \simeq \mathbb{U}$ est commutatif ; cela permet la définition des angles orientés.

Proposition. *Tout élément de $\mathcal{O}(n)$ est produit d'au plus n réflexions ; tout élément de $\mathcal{SO}(n)$ est produit d'au plus n renversements.*

Application. $\mathcal{SO}(3)$ est simple.

Proposition. *Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{O}(n)$.*

Proposition. *On a $\min\limits_{M \in SL_n(\mathbb{R})} \|M\|_2 = \sqrt{n}$ et ce minimum est réalisé exactement en $\mathcal{SO}(n)$.*

4. Quelques applications

4.1. Groupes d'isométries.

Proposition. *Les sous-groupes finis de $\mathcal{SO}(3)$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $D_{n/2}$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{S}_4$ ou $\mathcal{A}_5$.*

Remarque. $\mathcal{A}_4$ est le groupe du tétraèdre.
$\mathcal{S}_4$ est le groupe du cube et de l'octaèdre.
$\mathcal{A}_5$ est le groupe de l'icosaèdre et du dodécaèdre.

4.2. Représentations linéaires.

Définition. Soit G un groupe et E un $\mathbb{C}$-e.v.

- (i) Une *représentation linéaire* de G est un morphisme $\rho : G \to GL(E)$; si $\dim E = n$ alors n est appelé *degré* de la représentation.
- (ii) Un sous-espace F de E est *G-invariant* si F est stable par tout $\rho(g)$; si on pose $\rho_{|F} = \rho(g)_{|F}$ alors $\rho_{|F} : G \to GL(F)$ est une *sous-représentation.*
- (iii) ρ est *irréductible* si E et $\{0\}$ sont les seuls sous-espaces G-invariants.
- (iv) ρ est *totalement décomposable* si $E = \bigoplus\limits_{i \in I} E_i$ avec chaque E_i G-invariant et $\rho_{|E_i}$ irréductible.

Proposition (Maschke). *Si ρ est une représentation d'un groupe fini G et si F est G-invariant alors F admet un supplémentaire G-invariant.*

Proposition (Schur). *Si ρ est une représentation irréductible de G alors les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent avec tous les $\rho(g)$ sont les homothéties.*

Proposition (Weyl). *Une représentation continue d'un groupe topologique compact est totalement décomposable.*

Exemple. Les représentations de degré 1 d'un groupe fini G sont les morphismes $G \to \mathbb{U}$.

Exemple. Si G est fini et $(e_h)_{h \in G}$ est une base de $E = \mathbb{C}^{|G|}$, on pose $\rho(g)(e_h) = e_{gh}$, alors ρ est appelé *représentation régulière* de G.

Exemple. Une représentation d'un groupe abélien est irréductible si et seulement elle est de degré 1.

4.3. Utilisation des matrices transvections au changement de base.

On note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la place (i,j) qui vaut 1. Alors, multiplier $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\mathrm{I} + \alpha E_{i,j}$
– à droite permet de remplacer la colonne c_j par $c_j + \alpha c_i$
– à gauche permet de remplacer la ligne l_i par $l_i + \alpha l_j$
Pour échanger deux lignes k et ℓ, on multiplie à gauche par $(\delta_{i,\tau(j)})_{i,j}$ où τ est la transposition $(k\ \ell)$.

Application. Si Λ est un sous-réseau de rang m d'un réseau Γ de $\mathbb{R}^n$ alors il existe $e_1, \ldots, e_n$ et $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}^*$, avec d_j divise d_{j+1}, tels que $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n$ et $\Lambda = \mathbb{Z}d_1e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}d_me_m$.

Application (méthode de Gauss)**.** Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ avec PA triangulaire supérieure.

Application (factorisation LU)**.** Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k} \in GL_k(\mathbb{R})$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Alors $A = LU$ avec L triangulaire inférieure à coefficients diagonaux égaux à 1 et U triangulaire supérieure.

4.4. Classification des réseaux du plan.

On identifie le plan $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{P}$ le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} ; \mathrm{Im}\ z > 0\}$ et on considère le *groupe modulaire* $PSL_2(\mathbb{Z}) \simeq SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm \mathrm{I}_2\}$. On rappelle que $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition. *L'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{P}$ définie par*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

admet pour transversale le domaine $\mathcal{D}_0$ défini par
– *soit* $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\ z < \frac{1}{2}$ *et* $|z| > 1$,
– *soit* $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\ z \leq 0$ *et* $|z| = 1$.

Proposition. *À $\mathbb{C}^*$-homothétie près, les réseaux du plan sont en bijection avec $\mathcal{D}_0$.*

Développements

Théorème de Burnside-Schur.

Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Sous-groupes finis de $\mathcal{SO}(3)$.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[COM] F. Combes, *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.

[2] R. Goblot, *Algèbre commutative*, Masson, 1996.

[3] R. Mneimné et F. Testard, *Groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.

[4] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

[5] J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.

[6] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1998.