Algèbre 08 – Sous-groupes finis de $\mathcal{O}(2,\mathbb{R})$, de $\mathcal{O}(3,\mathbb{R})$. Applications.

Pour $n = 2$ ou 3, on note $\mathcal{O}(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ {}^tAA = \mathrm{I}\}$ et $\mathcal{SO}(n) = \{A \in \mathcal{O}(n); \det A = 1\}$.

1. Éléments d'ordre fini

On note E un espace euclidien de dimension 2 ou 3.

1.1. **Exemples d'involutions.**
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ une involution (*i.e.* $u \circ u = \mathrm{id}_E$).

Définition. On note
- $E_+ = \ker(u - \mathrm{id}_E)$ l'espace des *invariants*
- $E_- = \ker(u + \mathrm{id}_E)$ l'espace des *anti-invariants*

On a $E = E_+ \oplus E_-$.

Définition et proposition. On a

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff E_+ = E_-^\perp \iff u^* = u$$

et u est alors la *symétrie orthogonale* par rapport à E_+.

Définition. Si $\dim E_+ = n - 1$ et si u est la symétrie orthogonale par rapport à E_+, alors on dit que u est la *réflexion* d'hyperplan E_+.

Remarque. La symétrie s_{x_0} par rapport à l'hyperplan $(\mathbb{R}x_0)^\perp$ est donnée par : $s_{x_0}(x) = x - \frac{2\langle x_0, x\rangle}{\|x_0\|^2}x_0$ *i.e.* $s_{x_0} = \mathrm{id}_E - 2p_{\mathbb{R}x_0}$.

Remarque. Si $v \in \mathcal{O}(E)$ alors $v \circ s_{x_0} \circ v^{-1}$ est la symétrie par rapport à l'hyperplan $(\mathbb{R}v(x_0))^\perp$.

Définition. Si $E = \mathbb{R}^3$ et $\dim E_+ = 1$ alors la symétrie orthogonale s_{E_+} par rapport à E_+ est appelée un *demi-tour d'axe E_+*.

1.2. **Générateurs.**

Proposition. *Tout élément u de $\mathcal{O}(E)$ est le produit de $n - \dim\ker(u - \mathrm{id}_E)$ réflexions.*

Corollaire. *Tout élément de $\mathcal{SO}(E)$ est le produit d'un nombre pair de réflexions.*

Corollaire. *Les produits de deux réflexions engendrent $\mathcal{SO}(E)$.*

Corollaire. *Les demi-tours engendrent $\mathcal{SO}(3)$.*

Application. $\mathcal{SO}(3)$ est simple.

Application. $\mathrm{Aut}(\mathcal{SO}(3)) = \mathrm{Int}(\mathcal{SO}(3))$

1.3. **Centre.**

Lemme. *Si $u \in \mathcal{O}(E)$ et $x \neq 0$ alors $u \circ s_x \circ u^{-1} = s_{u(x)}$.*

Proposition. $Z(\mathcal{O}(E)) = \{\pm\mathrm{id}_E\}$, $Z(\mathcal{SO}(2)) = \mathcal{SO}(2)$ *et* $Z(\mathcal{SO}(3)) = \{\mathrm{id}_E\}$.

1.4. **Commutateurs.**

Proposition. $D(\mathcal{O}(E)) = \mathcal{SO}(E)$

Proposition. $D(\mathcal{SO}(2)) = \{\mathrm{I}_2\}$ *et* $D(\mathcal{SO}(3)) = \mathcal{SO}(3)$

2. Dimension 2, angles et polygones

Dans ce qui suit E est un espace euclidien de dimension 2.

Proposition. *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ et τ une réflexion (i.e. une symétrie orthogonale par rapport à une droite).*

(i) *Si u est négative alors u est une réflexion.*

(ii) *Si u est une rotation alors il existe une réflexion τ' telle que $u = \tau\tau'$.*

(iii) *Si ρ est une rotation alors $\tau\rho\tau^{-1} = \rho^{-1}$.*

Corollaire. *Les groupes $\mathcal{SO}(E)$ et $\mathcal{SO}(2)$ sont commutatifs.*

Corollaire. *Les matrices $A \in \mathcal{O}(2)$ sont de la forme*

(i) $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ *avec* $a^2 + b^2 = 1$ *si* $A \in \mathcal{SO}(2)$, *ou*

(ii) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ *avec* $a^2 + b^2 = 1$ *si* $\det A = -1$.

Une matrice $A \in \mathcal{SO}(2)$ s'écrit donc

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Définition. L'*angle* de A est θ modulo 2π.

Remarque. Puisque $\mathcal{SO}(2)$ est commutatif, la matrice d'une rotation ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie. On peut donc parler de l'*angle* d'une rotation.

Définition. On dit qu'une partie compacte d'intérieur non vide $\mathcal{P}$ du plan affine euclidien $\mathcal{E}$ est un *polygone* si $\mathcal{P}$ est l'intersection d'un nombre fini de demi-plans fermés. Si de plus, tous les côtés de $\mathcal{P}$ ont même longueur et tous les angles ont même mesure, on dit que $\mathcal{P}$ est un *polygone régulier*.

Proposition. *Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux polygones réguliers à $n \geq 3$ côtés alors il existe une similitude transformant $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}'$.*

Définition et proposition. On appelle *groupe d'un polygone* $\mathcal{P}$ le groupe $\mathrm{Is}_{\mathcal{P}}(\mathcal{E})$ des isométries f de $\mathcal{E}$ telles que $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Proposition. $D_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *est le groupe du polygone régulier à n côtés.*

Application (colliers de perles)**.** On dispose d'un fil circulaire, de 4 perles bleues, 3 blanches et 2 rouges. Combien de colliers différents peut-on faire avec ce matériel ?

Proposition. *Les sous-groupe finis de $\mathcal{O}(2)$ sont $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $D_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

3. Dimension 3 et polyèdres

Dans ce qui suit E est un espace euclidien de dimension 3.

Proposition. *Pout tout $u \in \mathcal{O}(E)$, il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de u soit de l'un des types suivants :*

– $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *avec* $0 \leq \theta \leq \pi$, *ou*

– $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *avec* $0 \leq \theta \leq \pi$.

Exemple. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ désigne la rotation d'axe $\mathbb{R}\vec{\imath}$ et d'angle π ; c'est le demi-tour d'axe $\mathbb{R}\vec{\imath}$ *i.e.* la symétrie orthogonale par rapport $\mathbb{R}\vec{\imath}$.

Remarque. Si $E_1 = \ker(u - \mathrm{id}_E)$ est l'espace des invariants alors la dimension de E_1 est : dans le premier cas, 1 si $0 < \theta \leq \pi$ et 3 si $A = \mathrm{I}_3$; dans le second cas, elle est nulle pour $0 < \theta \leq \pi$ et vaut 2 si $\theta = 0$.

Remarque. L'angle θ est l'angle *dans le plan* concerné par la rotation : il ne s'agit pas de l'angle entre les vecteurs x et $u(x)$. Par exemple, la rotation qui envoit $\vec{\imath}$ sur $\vec{\jmath}$, $\vec{\jmath}$ sur $\vec{k}$ et $\vec{k}$ sur $\vec{\imath}$ est la rotation d'axe $\langle(1,1,1)\rangle$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Remarque. Notons r_t le demi-tour d'axe $\mathbb{R}t$ alors $r_x \circ r_y = r_y \circ r_x$ si et seulement x et y sont colinéaires (auquel cas $r_x \circ r_y = \mathrm{id}_E$) ou orthogonaux.

Définition. On dit qu'une partie $\mathcal{P}$ de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ est un *polyèdre convexe* si $\mathcal{P}$ est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points non coplanaires.

Remarque. En particulier, un polyèdre convexe est compact et d'intérieur non vide.

Proposition. *Un polyèdre convexe est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés. Inversement, toute intersection compacte d'intérieur non vide d'un nombre fini de demi-espaces fermés est un polyèdre convexe.*

Proposition. *Les nombres F de faces, A d'arêtes et S de sommets d'un polyèdre convexe vérifient*

$$F - A + S = 2.$$

Application. Il n'existe pas de polyèdre à faces hexagonales.

Définition. On dit qu'un polyèdre convexe est *régulier* si ses faces sont des polygones réguliers isométriques et si, en chaque sommet, les figures formées par la réunion des arêtes y aboutissant sont isométriques.

Proposition. *Il y a cinq types de polyèdres réguliers.*

Définition. On appelle *groupe d'un polyèdre* $\mathcal{P}$ le groupe $\mathrm{Is}^+_{\mathcal{P}}(\mathcal{E})$ des isométries positives $\vec{f}$ de $\mathcal{E}$ telles que $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Exemple. Le groupe du tétraèdre est $\mathcal{A}_4$, celui du cube est $\mathcal{S}_4$, celui de l'icosaèdre est $\mathcal{A}_5$.

Proposition. *Les sous-groupes finis de $\mathcal{SO}(3)$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_n, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{S}_4$ ou $\mathcal{A}_5$.*

Développements

$\mathcal{SO}(3)$ est simple.

Colliers de perles.

Groupe des isométries du cube.

Sous-groupes finis de $\mathcal{SO}(3)$.

Références

[1] M. Audin, *Géométrie*, Belin, 1998.

[2] F. Combes, *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.

[3] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

[4] P. Tauvel, *Cours de géométrie*, Dunod, 2000.