Racines des polynômes à une indéterminée.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Racines d'un polynôme et divisibilité.

Dans toute cette partie, K est un corps et P un polynôme à coefficients dans K.

Définition 1.1 — Soient $a \in K$ et $k \geq 1$. On dit que a est une racine de P d'ordre k si le polynôme $(X-a)^k$ divise P avec k maximal. [3], Sect. 2.2

Proposition 1.2 — Si a est une racine de P d'ordre k alors il existe $Q \in K[X]$ tel que $P(X) = (X-a)^k\, Q(X)$. [3], Sect. 2.2

Proposition 1.3 — Si K est de caractéristique 0 et si P est non nul alors a est une racine de P d'ordre k si et seulement si $P^{(i)}(a) = 0$ pour tout $i < k$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$. [3], Sect. 2.2

Proposition 1.4 — Si $P(x) = 0$ pour tout $x \in K$ et si $\mathrm{card}(K) = +\infty$ alors $P = 0$. [3], Sect. 2.2

Proposition 1.5 — Si P est irréductible et de degré ≥ 2 alors P n'a pas de racines dans K. [4], Sect. 3.3

Proposition 1.6 — Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 sans racines réelles. [4], Sect. 3.3

2 Relations entre coefficients et racines.

Théorème 2.1 — Posons $P(X) = X^n + a_{n-1}\, X^{n-1} + \cdots + a_0$ et notons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de P. Alors, on a l'égalité

$$a_{n-k} = (-1)^k\ s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

où s_k est le polynôme symétrique élémentaire de degré k. [1], Sect. 3.2

Théorème 2.2 (formule de Newton) — Pour tout $k \geq 1$,

$$p_k = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1}\, s_i\, p_{k-i} + (-1)^{k-1}\, k\, s_k$$

où $p_k = X_1^k + X_2^k + \cdots + X_n^k$. [1], Sect. 3.4

Théorème 2.3 — Pour tout $r \in \mathbb{N}$, posons $\Gamma_r = \{\, P \in \mathbb{C}[X]\,;\, \deg P = r\,\}$. Alors pour tous n, $m \geq 1$, il existe une application continue $R : \Gamma_n \times \Gamma_m \longrightarrow \mathbb{C}$ appelée résultant telle que $R(P,Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre-eux. [3], Sect. 1.4

Application 2.4 — Soit D l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$. L'intérieur de D est l'ensemble des matrices dont les valeurs propres sont toutes distinctes. [3], Sect. 4.5

Proposition 2.5 — Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Posons

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i) \qquad \text{et} \qquad Q(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - y_i)$$

Alors

$$R(P,Q) = \prod_{i,j} (x_i - y_j)$$

En particulier, P et Q ont une racine commune si et seulement si $R(P,Q) = 0$. [1], Sect. 3.5

Définition 2.6 — Le discriminant d'un polynôme P de coefficient dominant a est donné par

$$D(P) = \frac{1}{a} (-1)^{n(n-1)/2} R(P,P')$$

Proposition 2.7 — Les discriminants des polynômes de degrés 2 et 3 sont donnés par

$$D(aX^2 + bX + c) = b^2 - 4\,ac \qquad \text{et} \qquad D(X^3 + pX + q) = -4\,p^3 - 27\,q^2$$

Proposition 2.8 — Si P est à coefficients dans $\mathbb{R}$ alors

1. si $\deg(P) = 2$ et $D(P) \geq 0$ alors P possède deux racines réelles ;
2. si $\deg(P) = 2$ et $D(P) < 0$ alors P possède deux racines complexes ;
3. si $\deg(P) = 3$ et $D(P) \geq 0$ alors P possède trois racines réelles ;
4. si $\deg(P) = 3$ et $D(P) < 0$ alors P possède une racine réelle et deux racines complexes.

3 Groupes résolubles et résolubilité des équations par radicaux.

Théorème 3.1 — Soient $P \in K[X]$ un polynôme de corps de décomposition L, $G = \mathrm{Gal}(L \mid K)$ son groupe de Galois et E l'ensemble de ses racines.

1. Si P est irréductible alors G agit transitivement sur E. [1], Sect. 8.1
2. Si G agit transitivement sur E alors L est le corps de décomposition d'un polynôme Q irréductible. [2], exercice 4.16

Définition 3.2 — Un polynôme $P \in K[X]$ est dit résoluble par radicaux s'il existe une extension radicale L de K contenant le corps de décomposition de P. [1], Sect. 12.1

Théorème 3.3 (Galois) — Si un polynôme P est résoluble par radicaux alors son groupe de Galois est résoluble. [1], chapitre 12

Théorème 3.4 — Le polynôme $P(X) = X^5 - 10X + 5$ de $\mathbb{Q}[X]$ n'est pas résoluble par radicaux. [1], Sect. 12.3

Références

[1] Jean-Pierre Escofier. *Théorie de Galois, cours et exercices corrigés.* Dunod, 1997.

[2] Hervé Francinou, Serge Gianella. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, algèbre 1.* Masson, 1995.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre.* Ellipses, 1994.

[4] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses, 1996.