Dimension d'un espace vectoriel. Exemples et applications.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Théorie de la dimension.

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

DÉFINITION 1.1 — Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite libre si

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \, x_i \ = \ 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_i \ = \ 0 \quad \forall \, i \in I$$

[3], Sect. 3.1

DÉFINITION 1.2 — Une partie $A \subset E$ est dite génératrice si $\mathrm{vect}(A) = E$. [3], Sect. 3.1

DÉFINITION 1.3 — On appelle base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute famille $(x_i)_{i \in I} \subset E$ à la fois libre et génératrice. [3], Sect. 3.1

DÉFINITION 1.4 — On dira que E est de dimension finie, ce que l'on supposera par la suite, s'il existe une famille génératrice finie de E. [3], Sect. 3.1

THÉORÈME 1.5 (BASE INCOMPLÈTE) — Soient $\mathcal{G}$ un système fini de générateurs de E et $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ un système libre. Alors il existe une base B de E telle que $\mathcal{L} \subset B \subset \mathcal{G}$. [3], Sect. 3.1

THÉORÈME 1.6 — Toutes les bases de E ont même cardinal n. L'entier n ainsi défini est appelé dimension de E, ce que l'on notera $\dim E = n$. [3], Sect. 3.1

PROPOSITION 1.7 — Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $E \ = \ E_1 \oplus E_2$;
2. $\dim E \ = \ \dim E_1 + \dim E_2$ et $E_1 \cap E_2 \ = \ \{0\}$;
3. $\dim E \ = \ \dim E_1 + \dim E_2$ et $E \ = \ E_1 + E_2$. [3], Sect. 3.1

THÉORÈME 1.8 (THÉORÈME DU RANG) — Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors f est de rang fini et $\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}\, f$. [3], Sect. 3.2

THÉORÈME 1.9 — Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp}$. De même, si G est un sous-espace vectoriel de l'espace dual E^* alors $\dim E^* = \dim G + \dim G^{\circ}$. [3], Sect. 3.4

2 Application aux invariants de similitudes.

DÉFINITION 2.1 — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$ une application linéaire. Pour tout $x \in E$, on appelle polynôme minimal de x relatif à f l'unique polynôme $P_x \in \mathbb{K}[X]$ unitaire, de plus bas degré et tel que $P_x(f)(x) = 0$. [3], Sect. 4.2

PROPOSITION 2.2 — $E_x = \{ \, P(f)(x) \, ; \, P \in \mathbb{K}[X] \, \}$ est un espace vectoriel de dimension $\deg(P_x)$. [3], Sect. 4.2

Définition 2.3 — Une application linéaire $f \in L(E)$ est dite cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = E_x$. [3], Sect. B.1

Théorème 2.4 — Etant donné $f \in L(E)$, il existe une suite $F_1, F_2, \cdots, F_r$ de sous-espaces vectoriels de E stables par f et tels que

1. $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_r$
2. Pour tout $1 \leq i \leq r$, la restriction f_i de f à F_i est un endomorphisme cyclique de F_i
3. Si P_i désigne le polynôme minimal de f_i alors pour tout $1 \leq i \leq r$, P_{i+1} divise P_i

De plus, la suite $P_1, P_2, \cdots, P_r$ ne dépend que de f et non du choix de la décomposition ; on l'appelle suite des invariants de similitude de f. [3], Sect. B.1

Application 2.5 (réduction de Frobenius) — Notons $P_1, P_2, \cdots, P_r$ la suite des invariants de similitude de $f \in L(E)$ et pour tout $1 \leq i \leq r$, $C(P_i)$ la matrice compagnon de P_i. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} C(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C(P_r) \end{pmatrix}$$

[3], Sect. B.1

3 Extensions de corps et points constructibles.

Définition 3.1 — Le degré d'une extension de corps $K \subset L$ est l'entier, noté $[L : K]$, égale à la dimension de L vu comme K-espace vectoriel.

Théorème 3.2 (multiplicativité des degrés) — Soient $K \subset M$ une extension de corps et L un corps intermédiaire. Alors

$$[M : K] = [M : L] \cdot [L : K]$$

Théorème 3.3 — Soient $K \subset L$ une extension de corps et α un élément de L. Alors α est algébrique sur K si et seulement si $\dim_K K[\alpha] < \infty$. [4], Sect. 3.1

Théorème 3.4 (Wantzel) — Tout réel constructible est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré une puissance de 2. [1], Sect. 2.22

Proposition 3.5 — Un p-groupe G possède des sous-groupes distingués à tous les ordres divisant l'ordre de G. [2], Sect. 1.4

Application 3.6 — Soient L un sous-corps de $\mathbb{R}$ et $(x, y) \in L^2$. Si l'extension $\mathbb{Q} \subset L$ est normale de degré une puissance de 2 alors le point (x, y) est constructible à la règle et au compas. [2], Ex 4.14

Références

[1] Jean-Claude Carrega. *Théorie des corps. La règle et le compas.* Hermann, 1989.

[2] Hervé Francinou, Serge Gianella. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, algèbre 1.* Masson, 1995.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre.* Ellipses, 1994.

[4] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses, 1996.