Algèbre 19 – Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications

On note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace de E.

1. Définitions

1.1. Espaces de dimension finie.

Définition. Famille liée/libre.

Définition. Partie génératrice, bases.

Proposition. *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E alors $x \in E$ est combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_n$ si et seulement si $\{x, e_1, \ldots, e_n\}$ est liée.*

Proposition. *Soit $f_1, \ldots, f_{p+1}$ des combinaisons linéaires de p vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ alors $\{f_1, \ldots, f_{p+1}\}$ est liée.*

Définition. On dit que E est *de dimension finie* s'il existe au moins une partie génératrice de cardinal fini non nul.

Proposition. *Si $E \neq \{0\}$ est de dimension finie alors E admet des bases de cardinal fini.*

Définition et proposition. Si $E \neq \{0\}$ est de dimension finie alors toutes les bases de E ont le même cardinal qui s'appelle la *dimension de E*.

Proposition. *Si E est de dimension finie $n \geq 1$ alors*
- (i) *toute partie libre $\mathcal{L}$ de E vérifie $r = \mathrm{Card}\mathcal{L} \leq n$,*
- (ii) *pour toute partie génératrice $\mathcal{G}$ de E, il existe une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$, de cardinal $n - r$, telle que $\mathcal{B} = \mathcal{L} \cup \mathcal{S}$ soit une base de E.*

Proposition. *Si $E \neq \{0\}$ est de dimension finie $n \geq 1$ alors tout sous-espace F de E est aussi de dimension finie, on a $p = \dim F \leq n$, F admet des supplémentaires et $F = E$ si $p = n$.*

1.2. Rang d'une famille de vecteurs.

2. Applications linéaires

2.1. Dimension et applications linéaires.

Proposition. *Une application linéaire est déterminée par ses valeurs aux vecteurs de base.*

Application. Théorème de Burnside.

Proposition. *Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si E_0 est un sous-espace de E de dimension finie alors $u(E_0)$ est un sous-espace de F de dimension finie.*

Proposition. *Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension.*

Application. Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

2.2. Rang d'une application linéaire.

2.3. Rang d'une matrice.

3. Dualité et orthogonalité

3.1. Sous-espaces vectoriels remarquables.

Exemple. Droites et plans.

Définition. Hyperplan.

Proposition. *Hyperplans en dimension finie.*

3.2. Orthogonalité.

4. Dimension finie et analyse

4.1. Continuité.

Application. Si E et F sont des e.v.n. avec E de dimension finie alors toute application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue.

4.2. Différentielle d'une application.

Application. Théorème des extrema liés.

Exemple. $\mathcal{SO}(n)$ est le lieu de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme $\| \|_2$ minimale.

5. Quelques applications géométriques

5.1. Espace des solutions d'un système linéaire.

Coordonnées barycentriques et théorème de Pascal.

5.2. Projections sur un fermé.

Application. Méthode du gradient conjugué.

5.3. Enveloppe convexe.

Proposition. *Caratheodory*

Application. Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Développements

Théorèmes de Burnside.

Théorème des extrema liés.

Théorème de Pascal.

Méthode du gradient conjugué.

Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[2] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 1998.

[3] B. Gostiaux, *Cours de Mathématiques spéciales*, P.U.F., 1993.

[4] X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 1994.

[5] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[6] C. Tisseron, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann, 2000.

Algèbre 20 – Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Définitions et généralités

Définition. Matrices équivalentes/semblables.

Remarque. Il s'agit de relations d'équivalence.

Proposition. *Interprétation en termes de changement de bases et d'applications linéaires.*

Proposition. *A est de rang r si et seulement si A est équivalente à la matrice* $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Corollaire. *A et B sont équivalentes si et seulement si A et B ont même rang.*

Application. L'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \mathrm{rg}(A) \leq r\}$ est l'adhérence de $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \mathrm{rg}(A) = r\}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition. *Si A et B sont semblables sur un surcorps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ alors A et B sont semblables sur $\mathbb{K}$.*

Proposition. *Si A et B sont semblables alors A et B ont même trace, déterminant, rang, polynôme caractéristique, polynôme minimal, valeurs propres.*

Exemple. Le rang d'un projecteur est sa trace.

Application. Les composantes connexes de l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs sont les ensembles

$$\mathcal{P}_i = \{P \in \mathcal{P}; \mathrm{rg}(P) = i\}.$$

2. Opérations élémentaires et systèmes linéaires

2.1. Représentant canonique.

Proposition. *Théorème de la base adaptée sur un anneau euclidien.*

Application. Structure des groupes abéliens de type fini.

2.2. Méthode de Gauss. [2, pp 73-82]

2.3. Factorisation LU. [2, pp 82-86]

3. Réduction ou choix d'un représentant

3.1. Diagonalisation et trigonalisation.

Définition. Matrice diagonalisable/trigonalisable.

Proposition. *Caractérisations des matrices diagonalisables/trigonalisables.*

Application. Soit $\gamma(A)$ la classe de similitude de A.

(i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors :

$$\gamma(A) \text{ fermée} \iff A \text{ diagonalisable}$$

(ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors :

$$\gamma(A) \text{ bornée} \iff A = \lambda \mathrm{I}_n, \lambda \in \mathbb{R}$$

3.2. Décomposition remarquables.

Proposition. *Réduction de Dunford.*

Application. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec χ_A scindé alors

$$A \text{ diagonalisable} \iff \exp A \text{ diagonalisable.}$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors

$$\exp A = \mathrm{I}_n \iff A \text{ diagonalisable et } \mathrm{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable alors

$$A \text{ diagonale} \iff \exp A \text{ diagonale.}$$

Proposition. *Réduction de Jordan.*

Définition et proposition. Invariants de similitude / réduction de Frobenius.

Application. A et B sont semblables si et seulement si A et B ont les mêmes invariants de similitude.

3.3. Utilisation de la structure euclidienne ou hermitienne.

Définition. Matrices orthogonalement/unitairement semblables.

Proposition. *Réduction des matrices symétriques ou hermitiennes.*

Application. Formes quadratiques.

Application. Racine carrée d'une matrice symétrique positive.

4. Conjugaison et isométries

Désormais $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Proposition. *Réduction des isométries.*

Application. $\mathcal{SO}(n)$ est connexe par arcs.

Si $S \in \mathrm{Sym}^{++}(n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on note :
- $q_S(x) = \langle Sx, x \rangle$,
- $\Sigma_S = \{x \in \mathbb{R}^n; q_S(x) \leq 1\}$,
- $\mathcal{O}(q_S)$ le groupe orthogonal associé à q_S.

Proposition. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors*

$$A \in \mathcal{O}(q_S) \iff {}^tASA = S \iff A\Sigma_S \subset \Sigma_S.$$

Application. $$\bigcap_{S \in \mathrm{Sym}^{++}(n)} \mathcal{O}(q_S) = \{\pm \mathrm{I}_n\}$$

Proposition. *Si G est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ alors $RGR^{-1} \in \mathcal{O}(n)$ avec R symétrique définie positive.*

Développements

Théorème de la base adaptée.

Cas où $\exp(A)$ est diagonale.

Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[2] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 1998.

[3] B. Gostiaux, *Cours de Mathématiques spéciales*, P.U.F., 1993.

[4] X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 1994.

[5] J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.