Algèbre 22 – Déterminants. Applications

1. Formes n-linéaires et déterminant

Soit A un anneau intègre de caractéristique différente de 2 et E un A-module libre de rang n.

Définition. Une *forme p-linéaire* sur E est une application $f : E^p \to A$ linéaire par rapport à chacune de ses variables.
Si de plus, $f(v_1, \dots, v_p) = 0$ dès que deux indices i, j vérifient $v_i = v_j$ alors f est dite *alternée.*

Exemple. Si f est p-linéaire alors $g : E^p \to A$ définie par $g(v_1, \dots, v_p) = \sum\limits_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)})$ est une forme p-linéaire alternée.

Proposition. *Si $f : E^p \to A$ est p-linéaire alternée alors, pour tout $\sigma \in S_p$ et tout $(v_1, \dots, v_p) \in E^p$, on a $f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)(v_1, \dots, v_p)$.*

Proposition. *Si $f : E^p \to A$ est p-linéaire alternée alors on ne change pas la valeur de f sur un p-uple de E^p en ajoutant à un vecteur une combinaison linéaire des autres.*

En particulier, f est nulle sur tout p-uple dont l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Proposition. *Le module des formes n-linéaires alternées sur E est libre de rang* 1.

Définition. Le *déterminant* dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est l'unique forme n-linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Le déterminant de $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$.

Définition. Le déterminant d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(A)$ est le déterminant des vecteurs colonnes de M.

Proposition. *Si $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ alors*

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \quad = \det {}^t A \end{aligned}$$

Exemple. Une matrice dont exactement un élément par ligne et par colonne est non nul a un déterminant non nul.

Définition et proposition. Si f est un endomorphisme de E alors le *déterminant de f* est l'unique scalaire $\det f$ tel que pour toute base $\mathcal{B}$ de E et tout $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ on ait $\det_{\mathcal{B}}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = \det f \cdot \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$.
De plus, si $M = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ alors $\det f = \det_{\mathcal{B}} M$.

Remarque. Soit f, g deux endomorphismes de E alors

$$\det(g \circ f) = \det g \cdot \det f.$$

De même, si $M, N \in \mathcal{M}_n(A)$ alors $\det MN = \det M \cdot \det N$.

Remarque. Si f est un endomorphisme de E et λ est un scalaire alors $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$. De même, si $M \in \mathcal{M}_n(A)$ et $\lambda \in A$ alors $\det \lambda M = \lambda^n \det M$.

2. Exemples et méthodes de calcul

2.1. **Déterminants par blocs.**

Proposition. $\det \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & M_{nn} \end{bmatrix} = \prod\limits_{i=1}^{n} \det M_{ii}.$

2.2. **Opérations élémentaires.** On ne change pas la valeur du déterminant d'une matrice en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres, ou en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres.

2.3. **Développements par rapport à une ligne ou une colonne.**

Définition. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(A)$.

(*i*) Le *mineur* relatif à $m_{i,j}$ est le déterminant de la matrice $M_{i,j}$ obtenue à partir de M en supprimant la $i^{\text{è}}$ ligne et la $j^{\text{è}}$ colonne.

(*ii*) Le *cofacteur* de $m_{i,j}$ est le scalaire $(-1)^{i+j} \det M_{i,j}$.

(*iii*) La *comatrice* de M est la matrice $\widetilde{M}$ des cofacteurs de M.

Proposition. *Si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(A)$ alors*

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det M_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det M_{i,j}.$$

Application. ${}^t\widetilde{M} M = M\, {}^t\widetilde{M} = (\det M) \mathrm{I}_n$

En particulier, M est inversible si et seulement si $\det M$ est inversible dans A ; on a alors $M^{-1} = (\det M)^{-1}\, {}^t\widetilde{M}$.

2.4. **Des exemples fondamentaux.**

Exemple. $\det \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ T_1^{n-1} & \cdots & T_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod\limits_{i<j} (T_j - T_i).$

Application. $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ est nilpotent si et seulement si Tr $(u^p) = 0$ pour tout p (on en déduit qu'un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini si et seulement s'il est d'exposant fini).

Exemple. Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tels que, pour tous i, j, on ait $a_i + b_j \neq 0$, alors

$$\det \left(\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{i,j} \right) = \frac{\prod_{i<j} (a_j - a_i) \prod_{i<j} (b_j - b_i)}{\prod_{i,j} (a_i + b_j)}.$$

Exemple. Le *polynôme caractéristique* d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\chi_A(X) = \det(A - X\mathrm{I}_n)$.

Exemple. Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré p et q respectivement ; on munit $\mathbb{K}_{p-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$ de la base $(1, 0), \dots, (X^{p-1}, 0), (0, 1), \dots, (0, X^{q-1})$. Le *résultant* $R[P, Q]$ de P et Q est le déterminant de la matrice de

$$\varphi : \mathbb{K}_{p-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X] \to \mathbb{K}_{p+q-1}[X], (U, V) \mapsto UP + VQ.$$

On a : $P \wedge Q = 1 \iff R[P, Q] \neq 0$.

3. Systèmes linéaires

3.1. Rang.

Définition. Le *rang* d'une matrice est le plus grand entier r tel que l'on puisse extraire une sous-matrice de taille $r \times r$ de déterminant non nul.

Application. $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \mathrm{rg}(A) \leq r\}$ est l'adhérence de $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \mathrm{rg}(A) = r\}$ et $\{A; \mathrm{rg}(A) > r\}$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition. Le *rang* d'un système linéaire est le rang de la matrice formée par les coefficients du système homogène.

3.2. Système de Cramer.

Définition. Un *système de Cramer* est un système linéaire de rang maximal.

Proposition. *Formules de Cramer*

3.3. Application aux coordonnées barycentriques.

On note $\mathcal{E}$ le plan affine muni d'un repère.

- un triplet (x, y, z) tel que $x + y + z \neq 0$ désigne le point de coordonnées (x, y, z) dans (A, B, C),
- un triplet (x, y, z) tel que $x + y + z = 0$ désigne le vecteur $x\,\overrightarrow{CA} + y\,\overrightarrow{CB}$.

Lemme. *Soit* $D(u, v, w)$, $D'(u', v', w')$ *et* $D''(u'', v'', w'')$ *trois droites distinctes de* $\mathcal{E}$, *on note* $\delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$ *et* $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix}$.

(*i*) *D et D' ont un unique point en commun si et seulement si $d \neq 0$;*
ce point est $P(vw' - wv', wu' - uw', uv' - vu')$.

(*ii*) *D et D' sont parallèles si et seulement si $d = 0$; la direction de D et D' est engendrée par le vecteur $V(vw' - wv', wu' - uw', uv' - vu')$.*

(*iii*) *D, D' et D'' sont parallèles ou ont un point commun unique si et seulement si $\delta = 0$.*

Définition. On dit que m est un "*point d'intersection*" de deux droites D et D' si

- soit D et D' se coupent et m est l'unique point en commun,
- soit D et D' sont parallèles et m est un vecteur non nul de leur direction commune.

Définition. Soit (D_0, D_0'), (D_1, D_1') et (D_2, D_2') trois couples de droites (tels que les droites de deux couples ne soient jamais parallèles ou concourantes) de "*points d'intersection*" respectifs m, n et p. On dit que m, n et p sont "*alignés*" si l'une des conditions suivantes est vérifiée

- $D_0 \parallel D_0'$, $D_1 \parallel D_1'$ et $D_2 \parallel D_2'$,
- $D_i \parallel D_i'$, D_j coupe D_j', D_k coupe D_k' et la droite formée par ces deux points d'intersection est parallèle à D_i,
- ces couples sont formés de droites concourantes en des points alignés.

Lemme. *On considère trois couples de droites (D_0, D_0'), (D_1, D_1') et (D_2, D_2') de "*points d'intersection*" respectifs $m(r, r', r'')$, $n(s, s', s'')$ et $p(t, t', t'')$. Alors m, n et p sont "*alignés*" si et seulement si* $\begin{vmatrix} r & r' & r'' \\ s & s' & s'' \\ t & t' & t'' \end{vmatrix} = 0$.

Théorème de Pascal. *Soit six points A, B, C, A', B' et C' dont trois ne sont jamais alignés. Alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'une conique non dégénérée passe par ces six points est que les "*points d'intersection*" m, n et p des couples de droites (BC', CB'),(CA', AC') et (AB', BA') soient "*alignés*". Cette conique est alors unique.*

4. Quelques applications

4.1. Utilisation de la régularité du déterminant.

Proposition. det *est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Application. $GL_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}(n)$ ne sont pas connexes.

Corollaire. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors*

$$\chi_A'(X) = \sum_{i=1}^{n} \det M_{i,i} = \mathrm{Tr}\ \widetilde{A - X\mathrm{I}_n}.$$

Application. algorithme de Faddeev

4.2. Exemples géométriques.

Théorème de John. *Un compact d'intérieur non vide est contenu dans un unique ellipsoïde de volume minimum.*

Soit E un espace préhilbertien réel.

Définition. On appelle *déterminant de Gram* de n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ de E, le déterminant $G(x_1, \ldots, x_n)$ de la matrice $(\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j}$.

Proposition. *Soit V un sous-espace de E de base $e_1, \ldots, e_n$ et $x \in E$ alors* $d(x, V)^2 = \dfrac{G(e_1, \ldots, e_n, x)}{G(e_1, \ldots, e_n)}$.

Application (Müntz)**.** Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement croissante de $]0, +\infty[$. Alors $\mathrm{Vect}(x^{\alpha_n}, n \geq 1)$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ pour $\|\ \|_2$ si et seulement si $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

Développements

Théorème de Pascal.

Théorème de John.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[2] R. Goblot, *Algèbre linéaire*, Masson, 1995.

[3] X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 1994.

[4] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[5] J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.

[6] P. Tauvel, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, Masson, 1997.

[7] C. Tisseron, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann, 2000.