Algèbre 23 – Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Diagonalisation et Trigonalisation

1.1. Valeurs propres et polynômes annulateurs.

Définition. valeurs propres ; sous-espaces propres ; polynôme caractéristique.

Exemple. Si u est nilpotent alors $\chi_u = (-1)^n X^n$.

Définition. polynôme minimal.

Proposition. *Cayley-Hamilton.*

Proposition. *Lemme des noyaux.*

Applications.
– Structure des suites récurrentes linéaires. – Sous-espaces caractéristiques.

1.2. Diagonalisation.

Définition et proposition. définitions équivalentes.

Exemples.
– u nilpotent et diagonalisable $\Rightarrow u = 0$
– un projecteur est diagonalisable

Proposition. *La restriction d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable.*

Proposition. *Diagonalisation simultanée.*

1.3. Trigonalisation.

Définition et proposition. définitions équivalentes.

Exemple. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos alors tout endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ est diagonalisable.

Application. Densité des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs propres distinctes.

Corollaire. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ avec $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & t_{i,j} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ et $|t_{i,j}| \leq \varepsilon$.*

Application. Théorème de Liapounov.

2. Quelques réductions remarquables

2.1. Décomposition de Dunford.

Proposition. *Si χ_u est scindé alors il existe d diagonalisable et n nilpotent uniques tels que $u = d + n$ avec $d \circ n = n \circ d$. De plus $d, n \in \mathbb{K}[u]$.*

Remarque. Écriture par blocs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Application. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec χ_A scindé alors

$$A \text{ diagonalisable} \iff \exp A \text{ diagonalisable.}$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors

$$\exp A = \mathrm{I}_n \iff A \text{ diagonalisable et } \mathrm{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable alors

$$A \text{ diagonale} \iff \exp A \text{ diagonale.}$$

Application. Formule du rayon spectral.

2.2. Réduction de Jordan.

Proposition. *Cas des endomorphismes nilpotents.*

Application. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si A et $2A$ sont semblables.

Proposition. *Cas général.*

Application. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ${}^tA$ sont semblables.

Remarque. Jordan $\Rightarrow$ Dunford

2.3. Invariants de similitude.

Définition et proposition. Invariants de similitude.

Proposition. *Réduction de Frobenius.*

Application. Deux endomorphismes sont semblables si et seulement s'ils ont mêmes invariants de similitude.

Remarque. Frobenius $\Rightarrow$ Jordan

3. Réduction d'endomorphismes remarquables

3.1. Cas euclidien.

Proposition. *Réduction des endom. normaux.*

Corollaire. *Réduction des isométries.*

Application. Connexité par arcs de $\mathcal{SO}(n)$.

Corollaire. *Réduction des endom. symétriques.*

Applications.
– réduction simultanée des formes quadratiques
– racine carrée d'un endom. symétrique positif

3.2. Cas hermitien.

Proposition. *Réduction des endom. normaux avec caractérisation en fonction des valeurs propres.*

Application. Connexité par arcs de $\mathcal{U}(n)$ et $\mathcal{SU}(n)$.

3.3. Endomorphismes semi-simples.

Définition. endomorphisme/matrice semi-simple.

Lemme. *Si μ_u est irréductible alors u est semi-simple.*

Proposition. *u semi-simple $\iff$ μ_u square-free*

Corollaire. *Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos alors u est semi-simple si et seulement si u est diagonalisable.*

Proposition. *Réduction de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semi-simple.*

Développements

Trigonalisation et théorème de Liapounov.

Surjectivité de l'exponentielle.

Réduction des endomorphismes semi-simples.

Cas où $\exp(A)$ est diagonale.

Références

[1] X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 1994.

[2] J. Hubbard et B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, 1999.

[3] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.

[4] J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.