Algèbre 37 – Endomorphismes diagonalisables

On note E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, f désigne un endomorphisme de E et on identifie toute matrice M à l'endomorphisme $x \mapsto Mx$.

1. Diagonalisabilité d'un endomorphisme

1.1. Généralités.

Définition. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est

(*i*) une *valeur spectrale* de f lorsque $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas bijective, l'ensemble des valeurs spectrales est appelé *spectre* de f et est noté ${}^{(}f)$;

(*ii*) une *valeur propre* de f lorsque $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas injective, on appelle alors *sous-espace propre associé* le noyau $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ et ses éléments non nuls sont les *vecteurs propres* associés à λ.

Remarque. Si f et g commutent alors tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

Remarque. Des sous-espaces propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Définition. On dit que f est *diagonalisable* si E est somme directe d'un nombre fini de sous-espaces propres.

Remarque. Si f est diagonalisable alors E admet une base formée de vecteurs propres de f ; la réciproque est fausse : si $E = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = XP'$ alors tout $k \in \mathbb{N}$ est valeur propre et $\{X^k ; k \geq 0\}$ est une base de vecteurs propres.

Exemple. En dimension n, si f admet n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable.

Exemple. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable

1.2. Utilisation de polynômes d'endomorphismes.

On considère l'idéal suivant de $\mathbb{K}[X]$

$$I_f = \{P \in \mathbb{K}[X] ; P(f) = 0\}.$$

Définition. Si $I_f \neq \{0\}$ alors on appelle *polynôme minimal* de f le polynôme unitaire μ_f qui engendre I_f.

Remarque. En dimension finie, tout endomorphisme admet un polynôme minimal mais pas en dimension infinie (prendre $E = \mathbb{R}[X]$ et $f(X^k) = X^{k+1}$).

Lemme. *Si $\mu_f = P_1^{\alpha_1} \cdots P_r^{\alpha_r}$ et si F est un sous-espace stable par f alors $F = \bigoplus_{i=1}^{r} (F \cap \ker P_i^{\alpha_i}(f))$.*

Proposition. *Si f est diagonalisable et F est un sous-espace stable par f alors $f_{|F}$ est diagonalisable.*

Application. Si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux alors il existe une base de E formée de vecteurs propres communs.

Proposition. *On a équivalence entre :*

(*i*) *f est diagonalisable*

(*ii*) *il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul scindé à racines simples tel que $P(f) = 0$*

(*iii*) *μ_f est scindé à racines simples*

Exemple. Un projecteur p est annulé par $X^2 - X$ donc est diagonalisable.

2. Le cas de la dimension finie

On suppose désormais que $\dim E = n$ donc le spectre de f est l'ensemble de ses valeurs propres et f est diagonalisable si et seulement si E admet une base de vecteur propres.

2.1. Utilisation du polynôme caractéristique.

Définition. Le polynôme $\chi_f = \det(f - X \mathrm{id}_E)$ est appelé le *polynôme caractéristique* de f.

Les racines de χ_f sont les valeurs propres de f.

Proposition (Cayley-Hamilton). $\chi_f \in I_f$

Proposition. *f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé et chaque racine a pour multiplicité la dimension du sous-espace propre correspondant.*

Exemple. Si f est nilpotent alors $\chi_f = (-1)^n X^n$ donc f n'est diagonalisable que si $f = 0$.

On dit que f est *trigonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit triangulaire supérieure.

Proposition. *Si χ_f est scindé alors f est trigonalisable.*

Corollaire. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors pout tout $\varepsilon > 0$, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit de la forme*

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & t_{i,j} \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \textit{avec} \quad |t_{i,j}| < \varepsilon.$$

Application. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors f est diagonalisable si et seulement si $\{\varphi f \varphi^{-1} ; \varphi \in GL(E)\}$ est fermé.

2.2. Endomorphismes semi-simples.

Définition. On dit que f est *semi-simple* si pour tout sous-espace F de E stable par f, il existe un supplémentaire S de F stable par f.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite semi-simple si l'endomorphisme $x \mapsto Mx$ est semi-simple.

Proposition. *f est semi-simple si et seulement si μ_f est un produit de polynôme irréductibles unitaires deux à deux distincts*

Corollaire. *Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos alors f est semi-simple si et seulement si f est diagonalisable.*

Proposition. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

(*i*) *M est semi-simple si et seulement si M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

(ii) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semi-simple alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}MP = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ avec D diagonale et B constituée de blocs de la forme $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ centrés sur sa diagonale principale.

3. Approximation par un endomorphisme diagonalisable

3.1. Décomposition de Dunford.

Proposition. *Si χ_f est scindé alors il existe $d, n \in \mathbb{K}[f]$ uniques avec d diagonalisable et n nilpotent tels que $f = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$.*

Remarque. Si χ_f est scindé alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit de la forme

$$\operatorname{diag}(\lambda_1 \mathrm{I}_{n_1} + N_1, \ldots, \lambda_s \mathrm{I}_{n_s} + N_s)$$

où les blocs N_i sont nilpotents.

Application. Calcul des puissances d'une matrice.

Application. Si N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} N(A^n)^{1/n} = \rho(A)$.

Application. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec χ_A scindé alors

$$A \text{ diagonalisable} \iff \exp A \text{ diagonalisable.}$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors

$$\exp A = \mathrm{I}_n \iff A \text{ diagonalisable et } \operatorname{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable alors

$$A \text{ diagonale} \iff \exp A \text{ diagonale.}$$

Application. Si χ_f est scindé alors

$$\lim_{t\to+\infty} \exp(tf) = 0 \iff \forall \lambda \in \operatorname{Sp}(f), \operatorname{Re} \lambda < 0.$$

3.2. Propriétés topologiques.

Proposition. *Les matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs propres distinctes sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Application. Autre démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

Proposition. *L'adhérence de l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables à valeurs propres distinctes est l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exemple. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas limite d'une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

4. Diagonalisabilité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

4.1. Matrices symétriques ou hermitiennes.

Les résultats suivants sont analogues dans le cas réel.

Proposition. *Si M est hermitienne alors il existe $P \in \mathcal{U}(n)$ telle que P^*MP soit diagonale réelle.*

Application. Obtention d'une racine carrée d'une matrice hermitienne positive avec unicité dans le cas défini positif.

Application. L'application exponentielle réalise un homéomorphisme de $\mathcal{H}(n)$ sur $\mathcal{H}^{++}(n)$.

Application. Si q est une forme quadratique alors il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de q soit diagonale réelle.

Corollaire. *Si M est hermitienne définie positive et si N est hermitienne alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^*MP = \mathrm{I}_n$ et P^*NP soit diagonale réelle.*

Application. Si $\mathcal{C}$ est une conique propre à centre alors il existe un repère orthonormé d'origine le centre tel que l'équation de $\mathcal{C}$ soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4.2. Diagonalisation dans le cas complexe.

Proposition. *$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale si et seulement s'il existe $P \in \mathcal{U}(n)$ telle que P^*MP soit diagonale.*

Corollaire. *Si $M \in \mathcal{U}(n)$ alors il existe $P \in \mathcal{U}(n)$ telle que*

$$P^*MP = \operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}).$$

Application. $\mathcal{U}(n)$ et $\mathcal{SU}(n)$ sont connexes par arcs

Corollaire. *Si M est antihermitienne, il existe $P \in \mathcal{U}(n)$ telle que P^*MP soit diagonale à coefficients imaginaires purs.*

4.3. Diagonalisation par blocs dans le cas réel.

Proposition. *Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale alors il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ telle que ${}^tPMP = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ avec D diagonale et B constituée de blocs de la forme $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ centrés sur sa diagonale principale.*

Corollaire. *Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique alors il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ telle que ${}^tPMP = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ avec B constituée de blocs de la forme $\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ centrés sur sa diagonale principale.*

Corollaire. *Si $M \in \mathcal{O}(n)$ alors il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et $0 < \theta_1 \le \theta_2 \le \cdots \le \theta_r < \pi$ tels que*

$${}^tPMP = \operatorname{diag}(\mathrm{I}_p, -\mathrm{I}_q, R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_r})$$

où $R_{\theta_j} = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & \sin\theta_j \\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix}$.

Application. $\mathcal{SO}(n)$ est connexe par arcs.

Développements

Endomorphismes semi-simples.

Diagonalisabilité de $\exp(A)$.

Homéomorphisme entre $\mathcal{H}(n)$ et $\mathcal{H}^{++}(n)$.

Références

[1] B. Gostiaux, *Cours de Mathématiques spéciales*, P.U.F., 1993.

[2] X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 1994.

[3] R. Mneimné et F. Testard, *Groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.

[4] J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.