Algèbre 26 – Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'un produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$ de norme associée $\| \|$.

1. Définitions et généralités

Proposition. *Si $f \in L(E)$, il existe un unique $f^* \in L(E)$ tel que $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$.*

En particulier, $\mathrm{id}_E^* = \mathrm{id}_E$, $f^{**} = f$ et $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Remarque. On a $\ker f = (\mathrm{Im}\ f^*)^\perp$ et $\mathrm{Im}\ f = (\ker f^*)^\perp$; si F est stable par f alors $F^\perp$ est stable par f^*

Définition. Soit $f \in L(E)$:

- (i) f^* est appelé l'*adjoint* de f
- (ii) si $f = f^*$ alors f est dit *symétrique* ou *autoadjoint*
- (ii) si $f = -f^*$ alors f est dit *antisymétrique*
- (iv) si $f \circ f^* = f^* \circ f = \mathrm{id}_E$ alors f est dit *orthogonal* (ou une *isométrie*)
- (v) si $f \circ f^* = f^* \circ f$ alors f est dit *normal*

Exemple. Pour tout $f \in L(E)$, $f^* \circ f$ est symétrique.

Si f est normal alors $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$ pour tout $x \in E$.

Interprétation matricielle : soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $f \in L(E)$ de matrice M dans $\mathcal{B}$:
- la matrice de f^* est M^T
- f est symétrique si et seulement si $M^T = M$
- f est antisymétrique si et seulement si $M^T = -M$
- f est orthogonal si et seulement si $M^T = M^{-1}$
- f est normal si et seulement si $M^T M = M M^T$

Exemple. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique alors $\exp(M)$ est orthogonale.

Remarque. Soit M une matrice symétrique. Si $\langle MX, X \rangle \geq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on dit que M est *symétrique positive*; si $\langle MX, X \rangle > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, on dit que M est *symétrique définie positive*, il s'agit alors de la matrice d'un produit scalaire.

Exemple. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M^*M est symétrique positive; si M est inversible alors M^*M est symétrique définie positive.

Application (décomposition d'Iwasawa)**.** Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible alors il existe un unique couple (O, T) avec O orthogonale et T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs tel que $M = OT$.

Proposition. *Soit $f \in L(E)$, on a équivalence entre :*

- (i) *f est orthogonal*
- (ii) *$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tous $x, y \in E$*
- (iii) *$\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$*
- (iv) *l'image par f d'une base orthonormale est une base orthonormale*

On note : $\mathcal{O}(E) = \{f \in L(E) \ ; \ f \circ f^* = \mathrm{id}_E\}$,

$$\mathcal{SO}(E) = \{f \in \mathcal{O}(E) \ ; \ \det f = 1\},$$

$$\mathcal{O}(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ MM^T = \mathrm{I}_n\},$$

$$\mathcal{SO}(n) = \{M \in \mathcal{O}(n) \ ; \ \det M = 1\}.$$

On a $\mathcal{O}(E) \simeq \mathcal{O}(n)$ et $\mathcal{SO}(E) \simeq \mathcal{SO}(n)$.

Remarque. Il s'agit de sous-groupes compacts de $GL(E)$ et $GL_n(\mathbb{R})$.

Lemme. *Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K un compact convexe de E tel que $u(K) \subset K$ pour tout $u \in G$, alors il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$ pour tout $u \in G$.*

Proposition. *Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{O}(n)$.*

2. Réduction des endomorphismes normaux

Proposition. *Soit $f \in L(E)$ est un endomorphisme normal alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, A_1, \ldots, A_s)$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ et $A_j = \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Corollaire. *Si M est antisymétrique alors*

$$P^T M P = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, A_1, \ldots, A_s)$$

où $P \in \mathcal{O}(n)$ et $A_j = \begin{bmatrix} 0 & -b_j \\ b_j & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition. *Si f est symétrique alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour f.*

Application. Soit Φ une forme quadratique, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de Φ est diagonale réelle.

Application. Obtention d'une racine carrée d'une matrice symétrique positive.

Application. L'application exponentielle réalise un homéomorphisme de $\mathrm{Sym}(n)$ sur $\mathrm{Sym}^{++}(n)$.

Corollaire. *Si M est symétrique définie positive et si N est symétrique alors il existe P inversible telle que $P^T M P = \mathrm{I}_n$ et $P^T N P$ soit diagonale réelle.*

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ où $n = \dim E \geq 2$, on pose $p + q + 2r = n$. Alors il existe $0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_r < \pi$ et une base orthonormée $\mathcal{B}$ tels que*

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_p, -\mathrm{I}_q, R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_r})$$

et q pair signifie que $f \in \mathcal{SO}(E)$.

Application. $\mathcal{SO}(n)$ est connexe par arcs.
Les composantes connexes de $\mathcal{O}(n)$ sont $\mathcal{SO}(n)$ et l'ensemble $\mathcal{O}^-(n) = \{M \in \mathcal{O}(n); \det M = -1\}$.

Application. L'exponentielle réalise une surjection de l'ensemble des matrices antisymétriques sur $\mathcal{SO}(n)$.

3. Étude du groupe orthogonal

3.1. Décomposition polaire et applications.

Proposition. *L'application*

$$\mathcal{O}(n) \times \mathrm{Sym}^{++}(n) \to GL_n(\mathbb{R}), (O, S) \mapsto OS$$

est un homéomorphisme.

Remarque. On a un résultat analogue pour l'application $(O, S) \mapsto SO$. De plus, la décomposition polaire persiste sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais on perd l'unicité.

Application. $\mathcal{O}(n)$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$.

Application. $GL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{O}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Application. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont unitairement semblables alors A et B sont orthogonalement semblables.

Application. L'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée (pour la norme $\|\!| \ \|\!|_2$ induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$).

Corollaire. *Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe Ω_1, Ω_2 dans $\mathcal{O}(n)$ et D diagonale à valeurs propres strictement positives telles que $A = \Omega_1 D \Omega_2$.*

Application. $d(M, \mathcal{O}(n)) = \left\| \sqrt{{}^tMM} - \mathrm{I} \right\|_2$

3.2. Générateurs et centre.

Proposition. *Tout élément f de $\mathcal{O}(E)$ est le produit de $n - \dim\ker(u - \mathrm{id}_E)$ réflexions.*

Corollaire. *Tout $u \in \mathcal{SO}(E)$ est le produit d'un nombre pair de réflexions.*

Corollaire. *Les produits de deux réflexions engendrent $\mathcal{SO}(E)$.*

On dit que f est un *renversement* si

$$\dim\ker(f - \mathrm{id}_E) = n - 2.$$

Corollaire. *Si $\dim E \geq 3$ alors les renversements engendrent $\mathcal{SO}(E)$.*

Application. $\mathcal{SO}(E)$ est simple pour $\dim E$ impaire.

Application. $\mathrm{Aut}(\mathcal{SO}(3)) = \mathrm{Int}(\mathcal{SO}(3))$

Proposition. $Z(\mathcal{O}(n)) = \{\pm \mathrm{I}_n\}$
$Z(\mathcal{SO}(n)) = \{\mathrm{I}_n\}$ *pour n impair et* $\{\pm \mathrm{I}_n\}$ *pour n pair* ≥ 4.

Remarque. $\mathcal{SO}(2) \simeq \mathbb{U}$ est commutatif ; cela permet la définition des angles orientés.

Remarque. $\mathcal{SO}(n)$ est le groupe dérivé de $\mathcal{O}(n)$ et de $\mathcal{SO}(n)$ pour $n \geq 3$. En revanche, $D(\mathcal{SO}(2)) = \{\mathrm{Id}_2\}$.

On pose $\mathbb{P}\mathcal{SO}(n) = \mathcal{SO}(n)/Z(\mathcal{SO}(n))$.

Proposition. $\mathbb{P}\mathcal{SO}(n)$ *est simple pour $n = 3$ ou $n \geq 5$.*

3.3. Considérations géométriques.

Proposition. *On a* $\min\limits_{M \in SL_n(\mathbb{R})} \|\!|M|\!\|_2 = \sqrt{n}$ *et ce minimum est réalisé exactement en $\mathcal{SO}(n)$.*

Proposition. *Les sous-groupes finis de $\mathcal{SO}(3)$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $D_{n/2}$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{S}_4$ ou $\mathcal{A}_5$.*

Remarque. $\mathcal{A}_4$ est le groupe des isométries positives du tétraèdre, $\mathcal{S}_4$ est celui du cube et de l'octaèdre, $\mathcal{A}_5$ est celui de l'icosaèdre et du dodécaèdre.

Développements

Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Homéomorphisme entre $\mathrm{Sym}(n)$ et $\mathrm{Sym}^{++}(n)$.

Décomposition polaire et application.

Sous-groupes finis de $\mathcal{SO}(3)$.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[2] X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 1994.

[3] R. Mneimné et F. Testard, *Groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.

[4] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

[5] J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.