Algèbre 27 – Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'un produit scalaire hermitien noté $\langle .,. \rangle$ de norme associée $\| \ \|$.

1. Définitions

Proposition. *Si $f \in \mathrm{L}(E)$, il existe un unique $f^* \in \mathrm{L}(E)$ tel que $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$.*

En particulier, $\mathrm{id}_E^* = \mathrm{id}_E$, $f^{**} = f$ et $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Remarque. On a $\ker f = (\mathrm{Im}\ f^*)^\perp$ et $\mathrm{Im}\ f = (\ker f^*)^\perp$; si F est stable par f alors $F^\perp$ est stable par f^*

Définition. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$:

(*i*) f^* est appelé l'*adjoint* de f

(*ii*) si $f = f^*$ alors f est dit *hermitien*

(*ii*) si $f = -f^*$ alors f est dit *antihermitien*

(*iv*) si $f \circ f^* = f^* \circ f = \mathrm{id}_E$ alors f est dit *unitaire*

(*v*) si $f \circ f^* = f^* \circ f$ alors f est dit *normal*

Exemple. Pour tout $f \in \mathrm{L}(E)$, $f^* \circ f$ est hermitien.

Si f est normal alors $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$ pour tout $x \in E$.

Interprétation matricielle : soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $f \in \mathrm{L}(E)$ de matrice M dans $\mathcal{B}$:
- la matrice de f^* est $M^* = \overline{M^T}$
- f est hermitien si et seulement si $M^* = M$
- f est antihermitien si et seulement si $M^* = -M$
- f est unitaire si et seulement si $M^* = M^{-1}$
- f est normal si et seulement si $M^*M = MM^*$

Exemples. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- M est antihermitienne si et seulement si iM est hermitienne
- si M est antihermitienne alors $\exp(M)$ est unitaire

Remarque. Soit M une matrice hermitienne. On a $\langle MX, X \rangle$ réel pour tout $X \in \mathbb{C}^n$. Si $\langle MX, X \rangle \geq 0$ pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, on dit que M est *hermitienne positive*; si $\langle MX, X \rangle > 0$ pour tout $X \in \mathbb{C}^n$ non nul, on dit que M est *hermitienne définie positive*, il s'agit alors de la matrice d'un produit hermitien.

Exemple. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, M^*M est hermitienne positive; si M est inversible alors M^*M est hermitienne définie positive.

Application (décomposition d'Iwasawa)**.** Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible alors il existe un unique couple (U, T) avec U unitaire et T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs tel que $M = UT$.

Proposition. *Soit $f \in \mathrm{L}(E)$, on a équivalence entre :*

(*i*) *f est unitaire*

(*ii*) *$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tous $x, y \in E$*

(*iii*) *$\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$*

(*iv*) *l'image par f d'une base orthonormale est une base orthonormale*

On note : $\mathcal{U}(E) = \{f \in \mathrm{L}(E) \ ; \ f \circ f^* = \mathrm{id}_E\}$,

$$\mathcal{SU}(E) = \{f \in \mathcal{U}(E) \ ; \ \det f = 1\},$$

$$\mathcal{U}(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ ; \ MM^* = \mathrm{I}_n\},$$

$$\mathcal{SU}(n) = \{M \in \mathcal{U}(n) \ ; \ \det M = 1\}.$$

On a $\mathcal{U}(E) \simeq \mathcal{U}(n)$ et $\mathcal{SU}(E) \simeq \mathcal{SU}(n)$.

Remarque. Il s'agit de sous-groupes compacts de $GL(E)$ et $GL_n(\mathbb{C})$.

Lemme. *Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K un compact convexe de E tel que $u(K) \subset K$ pour tout $u \in G$, alors il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$ pour tout $u \in G$.*

Proposition. *Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{U}(n)$.*

2. Réduction des endomorphismes normaux

Proposition. *Tout endomorphisme normal se diagonalise en base orthonormale.*

Corollaire. *Si M est antihermitienne alors il existe P unitaire telle que P^*MP soit diagonale à coefficients imaginaires purs.*

Proposition. *Si f est hermitienne alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour f et les valeurs propres de f sont réelles.*

Application. Si Φ est une forme hermitienne alors il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de Φ soit diagonale réelle.

Application. Obtention d'une racine carrée d'une matrice hermitienne positive.

Application. L'application exponentielle réalise un homéomorphisme de $\mathrm{Her}(n)$ sur $\mathrm{Her}^{++}(n)$.

Corollaire. *Si M est symétrique définie positive et si N est symétrique alors il existe P inversible telle que $P^TMP = \mathrm{I}_n$ et P^TNP soit diagonale réelle.*

Proposition. *Tout endomorphisme unitaire se diagonalise en base orthonormale et ses valeurs propres sont de module 1 i.e. si $M \in \mathcal{U}(n)$ alors il existe $P \in \mathcal{U}(n)$ et $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$ tels que*

$$P^*MP = \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{bmatrix}$$

et $\sum \theta_i \equiv 0 \pmod{2\pi}$ signifie que $M \in \mathcal{SU}(n)$.

Application. $\mathcal{U}(n)$ et $\mathcal{SU}(n)$ sont connexes par arcs.

Application. L'exponentielle réalise une surjection de l'ensemble des matrices antihermitiennes sur $\mathcal{SU}(n)$.

3. Étude du groupe unitaire $\mathcal{U}(n)$

3.1. **Décomposition polaire et applications.**

Proposition. *L'application*

$$\mathcal{U}(n) \times \mathrm{Her}^{++}(n) \to GL_n(\mathbb{C}), (U, H) \mapsto UH$$

est un homéomorphisme.

Remarque. On a un résultat analogue pour l'application $(U, H) \mapsto HU$. De plus, la décomposition polaire persiste sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mais on perd l'unicité.

Application. $\mathcal{U}(n)$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{C})$.

Application. $GL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$

Corollaire. *Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe Ω_1, Ω_2 dans $\mathcal{U}(n)$ et D diagonale à valeurs propres strictement positives telles que $A = \Omega_1 D \Omega_2$.*

Application. $d(M, \mathcal{O}(n)) = \left\| \sqrt{{}^t MM} - \mathrm{I} \right\|_2$

3.2. **Éléments remarquables.**

Remarque. Le centre de $\mathcal{U}(n)$ est $\{\lambda \mathrm{I}_n \ ; \ \lambda^n = 1\}$.

Les éléments de $\mathcal{SU}(2)$ sont les matrices

$$\begin{bmatrix} \lambda & -\overline{\mu} \\ \mu & \overline{\lambda} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda\overline{\lambda} + \mu\overline{\mu} = 1.$$

Proposition. $\mathcal{SU}(2)/\{\pm \mathrm{I}_2\} \simeq \mathcal{SO}(3)$

En particulier $\mathbb{P}\mathcal{SU}(2) = \mathcal{SU}(2)/\{\pm \mathrm{I}_2\}$ est simple.

Développements

Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{C})$.

Homéomorphisme entre $\mathrm{Her}(n)$ et $\mathrm{Her}^{++}(n)$.

Décomposition polaire et application.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[2] X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 1994.

[3] R. Mneimné et F. Testard, *Groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.

[4] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

[5] J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.