Isométries d'un espace affine euclidien. Applications.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Groupe des isométries.

Définition 1.1 — Un espace affine X associé à un espace vectoriel E est un ensemble sur lequel le groupe abélien $(E, +)$ agit simplement transitivement. [2], Sect. 3.2

Définition 1.2 — Si de plus E est un espace euclidien, X est appelé espace affine euclidien. [1], Sect. 9.1

Définition 1.3 — Une application $f : X \longrightarrow X$ est appelée isométrie si

$$\forall\ x, y \in X, \qquad d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

Proposition 1.4 — Notons $\mathcal{I}s(X)$ le groupe des isométries de X et $\mathrm{GA}(X)$ le groupe affine. Alors $f \in \mathcal{I}s(X)$ si et seulement si $f \in \mathrm{GA}(X)$ et $L(f) \in \mathcal{O}(X)$ où $L(f)$ désigne la partie linéaire de f. [1], Sect. 9.1

Définition 1.5 — Le noyau de l'application déterminant $\det : \mathcal{I}s(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$, noté $\mathcal{I}s^+(X)$, est appelé groupe des déplacements. Les éléments de $\mathcal{I}s^-(X) = \mathcal{I}s(X) \setminus \mathcal{I}s^+(X)$ sont appelés antidéplacements. [1], Sect. 9.1

Proposition 1.6 — Le centre de $\mathcal{I}s(X)$ est donné par $Z(\mathcal{I}s(X)) = Z(\mathcal{I}s^+(X)) = \{\mathrm{id}\}$.

Théorème 1.7 — Le groupe des isométries s'écrit comme produit semi-direct $\mathcal{I}s(X) = X \rtimes \mathcal{O}(X)$. [1], Sect. 9.1

2 Description géométrique.

Proposition 2.1 — Le groupe $\mathcal{I}s(X)$ agit simplement transitivement sur les repères orthonormés de X. [1], Sect. 9.2

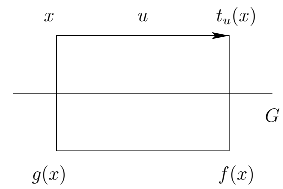
Corollaire 2.2 — Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux collections de points de X tels que $d(x_i, x_j) = d(y_i, y_j)$ pour tous $i,\ j \in I$. Alors il existe une isométrie f telle que pour tout $i \in I$, $f(x_i) = y_i$. [3], Sect. 30.3

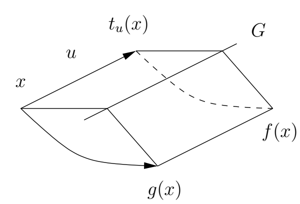
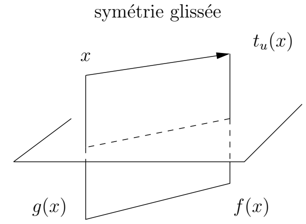
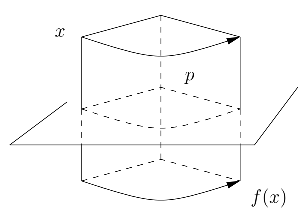
Théorème 2.3 — Soit $f \in \mathcal{I}s(X)$. Il existe un unique couple $(g, t_u) \in \mathcal{I}s(X) \times T(X)$ tel que l'ensemble G des points fixes de g soit non vide et tel que $f = g \cdot t_u = t_u \cdot g$. De plus, $u \in G = \mathrm{Ker}(L(f) - \mathrm{id})$. [1], Sect. 9.3

Théorème 2.4 — Posons $s = \dim X - \dim L(G)$. On a les assertions suivantes.

1. Si f admet au moins un point fixe alors f s'écrit comme produit de s symétries hyperplanes.
2. Si f n'admet pas de point fixe alors f s'écrit comme produit de $s + 2$ symétries hyperplanes.
3. Si $f \in \mathcal{I}s^+(X) \setminus T(X)$ alors f est produit de s retournements.
4. Si $f \in T(X)$ alors f est produit de deux retournements.

[1], Sect. 9.3

f	G	$L(f)$	$u=0$	$u \neq 0$
$\mathcal{I}s^+$	E	id	id	translation de vecteur u
	$\{p\}$	$-\,\mathrm{id}$	symétrie de centre p	
		rotation d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$	rotation de centre p et d'angle θ	
$\mathcal{I}s^-$	droite	$S_{\overrightarrow{G}}$	symétrie d'axe G	symétrie glissée 

f	G	$L(f)$	$u=0$	$u \neq 0$
$\mathcal{I}s^+$	E	id	id	translation de vecteur u
	droite	$S_{\overrightarrow{G}}$	symétrie d'axe G	symétrie glissée d'axe G
		rotation d'axe G et d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$	rotation d'axe G et d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$	vissage d'axe G 
$\mathcal{I}s^-$	plan	$S_{\overrightarrow{G}}$	réflexion de plan G	symétrie glissée 
	$\{p\}$	$-\,\mathrm{id}$	symétrie de centre x	
				

3 Pavages réguliers du plan.

Définition 3.1 — On appelle pavage du plan euclidien E tout couple (P, G) où P est une partie compacte de E, connexe, d'intérieur non vide et où G est un sous-groupe de $\mathcal{I}s^+(E)$ vérifiant les deux axiomes :

1. $E = \bigcup_{g \in G} g(P)$;
2. $\forall\, g, h \in G, \quad g(\overset{\circ}{P}) \cap h(\overset{\circ}{P}) \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad g(P) = h(P).$ [3], Sect. 35.2

Définition 3.2 — Un sous-groupe G de $\mathcal{I}s^+(E)$ est un groupe de pavage s'il existe une partie $P \subset E$ telle que (P, G) soit un pavage du plan euclidien. [3], Sect. 35.2

Théorème 3.3 — Soient $A \subset E$ une partie bornée non vide du plan euclidien et $\mathcal{I}s_A(E)$ le groupe des isométries de E conservant globalement A. Alors il existe un point $a \in A$ tel que pour tout $f \in \mathcal{I}s_A(E)$, $f(a) = a$. [3], Sect. 35.1

Théorème 3.4 — Le groupe de pavage G opère discrètement dans E. [1], Sect. 1.7, [3], Sect. 35.3

Théorème 3.5 — Soit $\Gamma = G \cap \mathcal{T}$ le groupe des translations de G. Alors Γ est un réseau, i.e. il existe une base (u, v) de E telle que $\Gamma = \mathbb{Z}\, u + \mathbb{Z}\, v$. [1], Sect. 1.7

Théorème 3.6 — Pour tout $g \in G$, notons $\mathcal{L}(g)$ la partie linéaire de g et $\mathcal{L}(G)$ l'ensemble des $\mathcal{L}(g)$, $g \in G$. Alors $\operatorname{card} \mathcal{L}(G) \in \{\, 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6 \,\}$. [1], Sect. 1.7

Définition 3.7 — Deux groupes de pavage G et H sont dits équivalents s'il existe $g \in \mathrm{GA}(E)$ tel que $G = g \cdot H \cdot g^{-1}$. [3], Sect. 35.4

Théorème 3.8 — Les groupes G et H sont équivalents si et seulement si $\operatorname{card} \mathcal{L}(G) = \operatorname{card} \mathcal{L}(H)$. [3], Sect. 35.4

Théorème 3.9 — Il existe exactement cinq classes d'équivalence de groupes de pavage. [3], Sect. 35.4

Références

[1] Marcel Berger. *Géométrie. Tome 1.* Nathan, 1990.

[2] Jacqueline Lelong-Ferrand. *Les fondements de la géométrie.* Puf, 1985.

[3] Patrice Tauvel. *mathématiques générales pour l'agrégation.* Masson, 1997.