Algèbre 30 – Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications

On considère un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension n sur un espace vectoriel E.

1. Définitions et généralités

Définition et proposition. Un *point pondéré* est un couple (A, λ) avec $A \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $\{(A_i, \lambda_i)\}_{1\leq i\leq k}$ avec $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$ alors il existe un unique $G \in \mathcal{E}$, appelé *barycentre* de $\{(A_i, \lambda_i)\}_{1\leq i\leq k}$, tel que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.
Si $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k$, on appelle G l'*isobarycentre* des A_i.

G est aussi caractérisé par $(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ (ce qui ne dépend pas de O).

Proposition. *Soit $\{(A_i, \lambda_i)\}_{1\leq i\leq k}$ avec $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$ et soit $I_1 \cup \cdots \cup I_p$ une partition de $\{1, \ldots, k\}$. On suppose que, pour tout j, $\mu_j = \sum_{i\in I_j} \lambda_i \neq 0$. Alors le barycentre de $\{(A_i, \lambda_i)\}_{1\leq i\leq k}$ est le barycentre de $\{(G_j, \mu_j)\}_{1\leq j\leq p}$ où G_j est le barycentre de $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i\in I_j}$.*

Exemples.
– Soit $A \neq B$, la droite (AB) est l'ensemble des barycentres des $(A, \lambda), (B, 1 - \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$; si l'on impose $\lambda \in [0, 1]$, il s'agit du segment $[A, B]$.
– L'isobarycentre de trois points A, B et C est le barycentre de $(A, 1), (I, 2)$ où I est le milieu du segment $[BC]$ *i.e.* l'isobarycentre de B et C.
– L'isobarycentre des sommets d'un tétraèdre $ABCD$ est le barycentre de $(A, 1), (I, 3)$ où I est l'isobarycentre de A, B et C.

Proposition. *Soit $\mathcal{E}'$ un autre espace affine réel et $\mathcal{F}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$.*
- *(i) $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est affine si et seulement si l'image par f du barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ (où $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$) est le barycentre de $(f(A_i), \lambda_i)_{i\in I}$.*
- *(ii) $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\mathcal{F}$ contient les barycentres des points de $\mathcal{F}$*

Définition. On dit que $\mathcal{R} = \{A_0, \ldots, A_n\}$ est un *repère affine* de $\mathcal{E}$ si $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$ est une base de E.
Si $M \in \mathcal{E}$ alors les réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ vérifiant $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ tels que M soit le barycentre des (A_i, λ_i) sont appelés les *coordonnées barycentriques* de M dans le repère $\mathcal{R}$.

Exemple. Soit ABC un triangle du plan affine alors les coodonnées barycentriques dans le repère (A, B, C)
– du centre de gravité sont $(1, 1, 1)$,
– de l'orthocentre sont
$$(a \cos \widehat{B} \cos \widehat{C}, b \cos \widehat{A} \cos \widehat{C}, c \cos \widehat{A} \cos \widehat{B}),$$
– du centre du cercle inscrit sont (a, b, c),
– du centre du cercle circonscrit sont
$$(\sin 2\widehat{A}, \sin 2\widehat{B}, \sin 2\widehat{C}).$$

Exemple. Si P et P' ont pour coodonnées barycentriques (p, q, r) et (p', q', r') dans un repère affine alors l'équation de la droite (PP') est $\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = 0.$
Si cette équation s'écrit $ux + vy + wz = 0$, on dit que (PP') à pour coordonnées (u, v, w).

Définition. Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est dite *convexe* si, pour tous $M, N \in \mathcal{C}$, on a $[MN] \subset \mathcal{C}$.

Proposition. *L'adhérence et l'intérieur d'une partie convexe de $\mathcal{E}$ sont convexes. Une intersection de parties convexes de $\mathcal{E}$ est convexe.*

Exemple. Dans un e.v.n., toute boule est convexe.

Application. Soit E un espace euclidien de dimension n et G un sous-groupe compact de $GL(E)$. Si K est une partie compacte convexe de E qui est stable par tout élément de G, alors il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

2. Enveloppe convexe et points extrémaux

Définition et proposition. L'*enveloppe convexe* d'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$ est l'intersection de tous les convexes contenant $\mathcal{A}$ *i.e.* il s'agit du plus petit convexe contenant $\mathcal{A}$.

Théorème de Caratheodory. *L'enveloppe convexe d'un compact non vide $\mathcal{K}$ de $\mathcal{E}$ est*
$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \ ; \ \lambda_i \geq 0, x_i \in \mathcal{K}, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\} .$$

Applications.
– Si $\mathcal{K}$ est un compact de $\mathcal{E}$ alors son enveloppe convexe est aussi compacte.
– Si G est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $PGP^{-1} \subset \mathcal{O}(n)$.
– Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg P \geq 2$ alors toute racine de P' est dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Théorème de Hahn-Banach. *Soit $\mathcal{A}$ un convexe fermé et $\mathcal{K}$ un convexe compact de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{A} \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan affine séparant strictement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{K}$.*

Corollaire. *Soit $\mathcal{K}$ une partie compacte de E. Alors $x \in E$ est adhérent à l'enveloppe convexe de K si et seulement si, pour tout $T \in E'$, on a : $T(x) \leq \sup_{y\in K} T(y)$.*

Application. L'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité pour $\||\ \||_2$.

Définition. On dit que M est un *point extrémal* d'une partie convexe $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$ si toute égalité du type $M = tP + (1-t)Q$ avec $t \in [0, 1]$ et $P, Q \in \mathcal{A}$ implique $M = P$ ou $M = Q$.

Exemple. $\mathcal{O}(n)$ est exactement l'ensemble des points extrémaux de la boule unité pour $\||\ \||_2$.

Exemple. $\mathrm{Sym}^+(n)$ est un cône convexe de sommet la matrice nulle dont les génératrices extrémales sont les demi-droites $\mathbb{R}^+S$ où $S \in \mathrm{Sym}^+(n)$ vérifie $S^2 = S$ et $\mathrm{Tr}\ S = 1$.

Théorème de Krein-Milman. *Un compact convexe non vide de $\mathcal{E}$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Application. Autre démonstration du fait que l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit la boule unité.

On suppose dans ce qui suit que $\mathcal{E}$ est de dimension 3.

Définition. On appelle *polyèdre convexe* l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points non coplanaires.

Remarque. En particulier, un polyèdre convexe est compact et d'intérieur non vide.

Proposition. *Un polyèdre convexe est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés. Inversement, toute intersection compacte non vide d'un nombre fini de demi-espaces fermés est un polyèdre convexe.*

Proposition. *Les nombres F de faces, A d'arêtes et S de sommets d'un polyèdre convexe vérifient*

$$F - A + S = 2.$$

Définition. On dit qu'un polyèdre convexe est *régulier* si ses faces sont des polygones réguliers isométriques et si, en chaque sommet, les figures formées par la réunion des arêtes y aboutissant sont isométriques.

Proposition. *Il y a cinq types de polyèdres réguliers.*

Définition. On appelle *groupe d'un polyèdre* $\mathcal{P}$ le groupe $\mathrm{Is}_{\mathcal{P}}(\mathcal{E})$ des isométries directes f de $\mathcal{E}$ telles que $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Exemple. Le groupe du tétraèdre est $\mathcal{A}_4$, celui du cube est $\mathcal{S}_4$, celui de l'icosaèdre est $\mathcal{A}_5$.

3. Exemple d'utilisation en géométrie plane

On note $\mathcal{E}$ le plan affine muni d'un repère, alors
- un triplet (x, y, z) tel que $x + y + z \neq 0$ désigne le point de coordonnées (x, y, z) dans (A, B, C),
- un triplet (x, y, z) tel que $x + y + z = 0$ désigne le vecteur $x\ \overrightarrow{CA} + y\ \overrightarrow{CB}$.

Lemme. *Soit $D(u, v, w)$, $D'(u', v', w')$ et $D''(u'', v'', w'')$ trois droites distinctes de $\mathcal{E}$, on note* $\delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$ *et* $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix}$.

(*i*) *D et D' ont un unique point en commun si et seulement si $d \neq 0$;*
ce point est $P(vw' - wv', wu' - uw', uv' - vu')$.

(*ii*) *D et D' sont parallèles si et seulement si $d = 0$; la direction de D et D' est engendrée par le vecteur $V(vw' - wv', wu' - uw', uv' - vu')$.*

(*iii*) *D, D' et D'' sont parallèles ou ont un point commun unique si et seulement si $\delta = 0$.*

Définition. On dit que m est un "*point d'intersection*" de deux droites D et D' si
- soit D et D' se coupent et m est l'unique point en commun,
- soit D et D' sont parallèles et m est un vecteur non nul de leur direction commune.

Définition. Soit (D_0, D'_0), (D_1, D'_1) et (D_2, D'_2) trois couples de droites (tels que les droites de deux couples ne soient jamais parallèles ou concourantes) de "*points d'intersection*" respectifs m, n et p. On dit que m, n et p sont "*alignés*" si l'une des conditions suivantes est vérifiée
- $D_0 \parallel D'_0$, $D_1 \parallel D'_1$ et $D_2 \parallel D'_2$,
- $D_i \parallel D'_i$, D_j coupe D'_j, D_k coupe D'_k et la droite formée par ces deux points d'intersection est parallèle à D_i,
- ces couples sont formés de droites concourantes en des points alignés.

Lemme. *On considère trois couples de droites (D_0, D'_0), (D_1, D'_1) et (D_2, D'_2) de* "points d'intersection" *respectifs $m(r, r', r'')$, $n(s, s', s'')$ et $p(t, t', t'')$. Alors m, n et p sont* "alignés" *si et seulement si* $\begin{vmatrix} r & r' & r'' \\ s & s' & s'' \\ t & t' & t'' \end{vmatrix} = 0$.

Théorème de Pascal. *Soit six points A, B, C, A', B' et C' dont trois ne sont jamais alignés. Alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'une conique non dégénérée passe par ces six points est que les* "points d'intersection" *m, n et p des couples de droites (BC', CB'),(CA', AC') et (AB', BA') soient* "alignés". *Cette conique est alors unique.*

4. Utilisation de la structure d'e.v.n.

On rappelle que si $\mathcal{F}$ est fermé dans $\mathcal{E}$ alors, pour tout $P \in \mathcal{E}$, il existe $P' \in \mathcal{F}$ tel que $PP' = d(P, \mathcal{F})$; on dit que P' est un *projeté* de P sur $\mathcal{F}$.

Application (Brouwer). Si $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ est continue avec $\mathcal{K}$ convexe compact de $\mathcal{E}$ alors f admet un point fixe.

Définition et proposition. La *norme jauge* d'un voisinage de 0 convexe, symétrique et compact K est la norme $j_K : E \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$j_K(x) = \inf\{r > 0; x \in rK\}.$$

Application. Si $\|\ \|$ est une norme sur E alors il existe un voisinage de 0 convexe, symétrique et compact K tel que $\|\ \|$ soit la norme jauge de K.

Théorème de John. *Un compact d'intérieur non vide est contenu dans un unique ellipsoïde de volume minimum.*

Application. Autre preuve du fait qu'un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{O}(n)$.

Développements

Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$.

Groupe du tétraèdre ou du cube.

Théorème de Pascal.

Théorème de John.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[2] M. Audin, *Géométrie*, Belin, 1998.

[3] F. Combes, *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.

[4] G. Laville, *Géométrie pour le capes et l'agrégation*, Ellipses, 1998.

[5] P. Tauvel, *Cours de géométrie*, Dunod, 2000.

[6] C. Tisseron, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann, 2000.

[7] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.