Exemples de parties denses et applications.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Exemples de parties denses.

DÉFINITION 1.1 — Une partie D d'un espace topologique X est dite dense dans X si sa fermeture $\bar{D}$ coïncide avec X.

EXEMPLE 1.2 — L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle.

EXEMPLE 1.3 — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors le groupe linéaire $GL(E)$ est un ouvert dense de $L(E)$. [6], Sect. 22.4

THÉORÈME 1.4 (WEIERSTRASS) — L'espace des polynômes est dense dans l'espace des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. [4], Sect. 4.6

THÉORÈME 1.5 (MÜNTZ) — Soient $C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et α_n, $n \geq 0$, une suite strictement croissante à valeurs positives. Alors, l'espace vectoriel

$$E \;=\; \mathrm{vect}\,(\, f_n(x) = x^{\alpha_n} \;;\; n \geq 0\,)$$

est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ si et seulement si la série de terme générale α_n^{-1} diverge. [4], Sect. 4.6

THÉORÈME 1.6 — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Alors l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$. [1], Sect. 4.4

2 Deux critères de densité : les théorèmes de Hahn-Banach et de Baire.

THÉORÈME 2.1 (HAHN-BANACH, FORME GÉOMÉTRIQUE) — Soient A et B deux parties disjointes, convexes et non vides d'un espace vectoriel normé E. Si A est fermée et B compacte, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict. [1], Sect. 1.2

COROLLAIRE 2.2 — Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel dense dans E. Alors toute forme linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ nulle sur F est nulle sur E. [1], Sect. 1.2

APPLICATION 2.3 — Pour tout $a > 1$, notons f_a la fonction définie par

$$f_a(x) \;=\; \frac{1}{x-a} \qquad x \in [0,1]$$

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement supérieurs à 1 et de limite $+\infty$. Alors l'espace vectoriel $V = \mathrm{vect}(f_{a_n}\,,\, n \geq 0)$ est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$. [2], Sect. 2.1

PROPOSITION 2.4 — Soient E un espace complet et $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fermés non vides de E. Si la suite des diamètres $\delta(F_n) \to 0$ alors $\bigcap_{n\geq 0} F_n$ est un singleton. [4], Sect. 1.2

THÉORÈME 2.5 (BAIRE) — Soit E un espace complet. Toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide de E est d'intérieur vide. De façon équivalente, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. [1], Sect. 2.1

APPLICATION 2.6 — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' est une partie dense de $\mathbb{R}$. [4], annexe A

APPLICATION 2.7 — L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ nulle part dérivables est dense dans l'espace des fonctions continues. [4], annexe A

THÉORÈME 2.8 — Soit V un sous-espace fermé de $C([0, 1], \mathbb{R})$, espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Si toute application $f \in V$ est de classe C^1 alors V est de dimension finie.
2. Si pour tout $f \in V$ il existe des constantes α, $C > 0$ telles que pour tous x, $y \in [0, 1]$,

$$|f(x) - f(y)| \ \leq \ C|x - y|^\alpha$$

alors V est de dimension finie. [2], Sect. 2.4

THÉORÈME 2.9 (BANACH-STEINHAÜS) — Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé et $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Alors on a l'alternative suivante :

1. ou bien $\sup_{i\in I} \| T_i \| < +\infty$;
2. ou bien $\sup_{i\in I} \| T_i(x) \| = +\infty$ pour tout x dans à un G_δ dense dans E. [5], Sect. 5.2

APPLICATION 2.10 — L'ensemble des fonctions f continues 2π-périodiques dont la série de Fourier ne converge pas simplement vers f est un G_δ dense. [5], Sect. 5.3

3 Utilisation de la densité.

THÉORÈME 3.1 — Soit X un espace métrique, Y un espace complet, $A \subset X$ une partie dense dans X et $f : A \longrightarrow Y$. Si f est uniformément continue, il existe une unique fonction $g : X \longrightarrow Y$ uniformément continue et prolongeant f. [4], Sect. 1.2

PROPOSITION 3.2 — L'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. [3], Sect. 4.3

APPLICATION 3.3 — Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notons

$$P_A(X) \ = \ (-1)^n \ (X^n \ + \ f_1(A)X^{n-1} \ + \ \cdots \ + \ f_n(A))$$

son polynôme caractéristique. Soit $Q : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$, $A \mapsto Q(A)$ une fonction polynômiale en les coefficients de A. Si pour toutes matrices A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $Q(AB) = Q(BA)$ alors il existe $F \in \mathbb{C}[\, X_1 \, , \, X_2 \, \dots \, X_n \,]$ tel que

$$Q(A) = F(\, f_1(A) \, , \, f_2(A) \, \dots \, f_n(A) \,)$$

pour toute matrice A. [3], Sect. 4.5

Références

[1] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Dunod, 1999.

[2] Stéphane Gonnord, Nicolas Tosel. *Thèmes d'analyse pour l'agrégation. Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre.* Ellipses, 1994.

[4] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[5] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1995.

[6] Patrice Tauvel. *mathématiques générales pour l'agrégation.* Masson, 1997.