Utilisation de la notion de compacité.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Propriété de Borel-Lebesgue ; propriétés classiques.

Définition 1.1 — Un espace topologique X est dit compact s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement ouvert $(\Omega_i)_{i\in I}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Proposition 1.2 — Un espace X est compact si et seulement si toute collection $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de X vérifiant la propriété de l'intersection finie a une intersection non vide.

Proposition 1.3 — Soient X un espace métrique compact et $C(X,\mathbb{R})$ l'algèbre des applications continues de X dans $\mathbb{R}$. Si $\mathcal{I}$ est un idéal de $C(X,\mathbb{R})$, $\mathcal{I}\neq C(X,\mathbb{R})$, alors il existe un élément $x\in X$ tel que pour tout $f\in\mathcal{I}$, $f(x)=0$. [3], Sect. 1.3

Théorème 1.4 (Bolzano-Weierstrass) — Soit (E,d) un espace métrique. Alors E est compact si et seulement si E est complet et précompact. En particulier, tout espace compact est complet. [4], Sect. 5.2

Proposition 1.5 — Toute partie fermée d'un espace compact est compacte. Toute partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée. [3], Sect. 1.3

Théorème 1.6 (Riesz) — La boule unité fermée d'un espace vectoriel normé E est compacte si et seulement si E est de dimension finie. [4], Sect. 7.5

2 Compacité et continuité.

Théorème 2.1 (Heine) — Soient X et Y deux espaces métriques et f une application continue de X dans Y. Si X est compacte alors f est uniformément continue. [3], Sect. 1.3

Théorème 2.2 (Dini) — Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de fonctions réelles continues sur un espace compact X. Si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction f continue sur X alors la convergence est uniforme. [3], Sect. 4.3

Théorème 2.3 (Weierstrass) — L'espace des polynômes est dense dans l'espace des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. [3], Sect. 4.6

Définition 2.4 — Soient (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques. Une partie $\mathcal{F}\subset C(X,Y)$ est dite équicontinue si pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que

$$\forall f\in\mathcal{F}\quad \forall\, x,y\in X,\qquad d_X(x,y)<\eta \quad\Longrightarrow\quad d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$$

Théorème 2.5 (Ascoli) — Soient X et Y deux espaces métriques compacts. Une partie $\mathcal{F}$ de $C(X,Y)$ est équicontinue si et seulement si $\mathcal{F}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme. [4], Sect. 5.3

Théorème 2.6 (Riesz-Frechet-Kolmogorov) — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\omega\subset\subset\Omega$ une partie compacte de Ω et $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$, $1\leq p<\infty$. Si pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que

$$\|\tau_h f-f\|_{L^p(\Omega)}<\varepsilon\qquad\forall\,|h|<\eta\qquad\forall\, f\in\mathcal{F}$$

alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$. [1], Sect. 4.5

Théorème 2.7 — Soit V un sous-espace fermé de $C([0,1],\mathbb{R})$, espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Si toute application $f \in V$ est de classe C^1 alors V est de dimension finie.
2. Si pour tout $f \in V$ il existe des constantes α, $C > 0$ telles que pour tous x, $y \in [0,1]$,

$$|f(x) - f(y)| \;\leq\; C|x-y|^\alpha$$

   alors V est de dimension finie. [2], Sect. 2.4

Théorème 2.8 (Stone-Weierstrass) — Soient X un espace compact et $\mathcal{F} \subset C(X)$ où $C(X)$ désigne l'ensemble des applications continues de X dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$) muni de la topologie de la convergence uniforme. On suppose que

1. $\mathcal{F}$ est une algèbre (resp. une algèbre auto-conjuguée) ;
2. $\mathbb{1}_X \in \mathcal{F}$;
3. $\mathcal{F}$ est fermé dans $C(X)$.

Alors $\mathcal{F} = C(X)$ si et seulement si $\mathcal{F}$ sépare les points.

3 Compacité et convexité.

Théorème 3.1 (Hahn-Banach, forme géométrique) — Soient A et B deux parties disjointes, convexes et non vides d'un espace vectoriel normé E. Si A est fermée et B compacte, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict. [1], Sect. 1.2

Corollaire 3.2 — Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel dense dans E. Alors toute forme linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ nulle sur F est nulle sur E. [1], Sect. 1.2

Application 3.3 — Pour tout $a > 1$, notons f_a la fonction définie par

$$f_a(x) \;=\; \frac{1}{x-a} \qquad x \in [0,1]$$

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement supérieurs à 1 et de limite $+\infty$. Alors l'espace vectoriel $V = \mathrm{vect}(f_{a_n}\,,\, n \geq 0)$ est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$. [2], Sect. 2.1

Proposition 3.4 — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et A une partie compacte de E. Alors $\mathrm{conv}(A)$, l'enveloppe convexe de A, est compacte. [4], Sect. 5.4

Références

[1] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Dunod, 1999.

[2] Stéphane Gonnord, Nicolas Tosel. *Thèmes d'analyse pour l'agrégation. Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[4] Claude Zuily, Hervé Queffélec. *Eléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.