Méthodes hilbertiennes.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Théorème de représentation de Riesz. Applications.

Théorème 1.1 (inégalité de Cauchy-Schwarz) — Soient H un espace de Hilbert, x et y deux éléments de H. Alors $\langle x \cdot y \rangle \leq \| x \| \cdot \| y \|$. [3], Sect. 4.1

Théorème 1.2 (projection sur un convexe fermé) — Etant donnés H un espace de Hilbert, C un convexe fermé de H et $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ appelé projection orthogonale de x sur C tel que $\| x - y \| = d(x, C)$. De plus, y est caractérisé par la relation

$$\forall \ z \in C \qquad \langle z - y \cdot x - y \rangle \ \leq \ 0$$

[2], Sect. B.1

Théorème 1.3 — Soit F un sous-espace fermé de H. Alors il existe un couple unique d'applications P et Q telles que P envoie H dans F, Q envoie H dans $F^{\perp}$ et $x = P(x) + Q(x)$ pour tout $x \in H$. [3], Sect. 4.1

Définition 1.4 — Les applications P et Q sont respectivement appelées projections orthogonales de H sur F et $F^{\perp}$. [3], Sect. 4.1

Théorème 1.5 — Un sous-espace vectoriel $F \subset H$ est dense dans H si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$. [2], Sect. B.1

Théorème 1.6 (théorème de représentation de Riesz) — Pour tout $a \in H$, notons f_a la forme linéaire définie pour tout $x \in H$ par $f_a(x) = \langle a \cdot x \rangle$. Alors l'application $\varphi : H \longrightarrow H'$ définie par $\varphi(a) = f_a$ est un isomorphisme, i.e. pour toute forme linéaire $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique élément $a \in H$ tel que pour tout $x \in H$, $f(x) = \langle a \cdot x \rangle$. [2], Sect. B.1

Théorème 1.7 (Lax-Milgram) — Soit a une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour toute forme linéaire $f \in H'$ il existe un unique élément $u \in H$ tel que $a(u, v) = f(v)$ pour tout $v \in H$. De plus, si a est symétrique, u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2} \ a(u, u) - f(u) \ = \ \min_{v \in H} \ \left\{ \frac{1}{2} \ a(v, v) - f(v) \right\}$$

[1], Sect. 5.3

2 Propriétés des bases hilbertiennes.

Définition 2.1 — Soit H un espace de Hilbert. On appelle base hilbertienne de H toute suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1. pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $\langle e_i \cdot e_j \rangle = \delta_{i,j}$;
2. l'espace vectoriel engendré par les e_n, $n \geq 0$ est dense dans H. [1], Sect. 5.4

Théorème 2.2 (inégalité de Bessel) — Soit $(e_i)_{i \in \Lambda}$ un ensemble orthonormé de H. Alors pour tout $x \in H$,

$$\sum_{i \in \Lambda} \ |\langle x \cdot e_i \rangle|^2 \ \leq \ \| x \|^2$$

[3], Sect. 4.2

Théorème 2.3 (égalité de Bessel-Parseval) — Soit $(e_i)_{i\in\Lambda}$ un ensemble orthonormé de H. Alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

1. $(e_i)_{i\in\Lambda}$ est une base hilbertienne de H
2. $(e_i)_{i\in\Lambda}$ est un ensemble orthonormé maximal de H
3. pour tout $x \in H$, on a l'égalité de Bessel-Parseval $\|x\|^2 = \sum_{i\in\Lambda} |\langle u \cdot e_i\rangle|^2$
4. pour tous $x, y \in H$, $\langle x \cdot y\rangle = \sum_{i\in\Lambda} \langle x \cdot e_i\rangle \overline{\langle y \cdot e_i\rangle}$

[3], Sect. 4.2

3 Topologie faible dans les espaces de Hilbert.

Définition 3.1 — Soient H un espace de Hilbert et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de H. On dira que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers $x \in H$ si pour tout $y \in H$, $\lim_{n\to\infty}\langle x_n \cdot y\rangle = \langle x \cdot y\rangle$. [2], Sect. B.2

Proposition 3.2 — Si la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers $x \in H$ et si

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$$

alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge fortement vers x, i.e. $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. [2], Sect. B.2

Théorème 3.3 (compacité de la boule unité) — Toute suite bornée $(x_n)_{n\geq 0} \subset H$ admet une sous-suite faiblement convergente, i.e. toute partie bornée d'un espace de Hilbert est faiblement compacte. [2], Sect. B.2

Théorème 3.4 (égalité de Bessel-Parseval) — Soit $(e_i)_{i\in\Lambda}$ un ensemble orthonormé de H. Alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

1. $(e_i)_{i\in\Lambda}$ est une base hilbertienne de H
2. $(e_i)_{i\in\Lambda}$ est un ensemble orthonormé maximal de H
3. pour tout $x \in H$, on a l'égalité de Bessel-Parseval $\|x\|^2 = \sum_{i\in\Lambda} |\langle u \cdot e_i\rangle|^2$
4. pour tous $x, y \in H$, $\langle x \cdot y\rangle = \sum_{i\in\Lambda} \langle x \cdot e_i\rangle \overline{\langle y \cdot e_i\rangle}$

[3], Sect. 4.2

Références

[1] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Dunod, 1999.

[2] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[3] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1995.