APPLICATIONS DU THEOREME D'INVERSION LOCALE ET DU THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES

PLAN : Le plan est directement donné par l'énoncé de la leçon !

-I- Introduction.
-II- Théorème d'inversion locale et applications.
 -1- Enoncé du théorème.
 -2- Inversion globale.
 -3- Changement de coordonnées locales. Lemme de Morse.
-III- Le théorème des fonctions implicites.
 -1-Enoncé du théorème.
 -2- Le théorème des extrema liés de Lagrange.
 -3- Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ définies implicitement.

DEVELOPPEMENTS (peut-être un peu trop classique…) :
1. Le lemme de Morse.
2. Le théorème des extrema liés de Lagrange.

BIBLIOGRAPHIE :

1. Petit guide de calcul différentiel, Rouvière, Cassini. (j'ai quasiment tout pris dedans !).
2. Les mathématiques en tête-analyse, Gourdon, Ellipses.
3. Eléments d'analyse pour l'agrégation, Zuily - Queffélec, Masson.

-I- Introduction.

Dans cette leçon, nous illustrons deux théorèmes fondamentaux du calcul différentiel. Ces deux théorèmes sont d'ailleurs équivalent entre eux et équivalent à un troisième théorème (mode de représentation d'une sous-variété).

Dans toute la leçon, nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$.

Remarque : C'est une leçon typique où il ne faut pas hésiter à faire de beaux dessins au tableau pendant le discours…

-II- Théorème d'inversion locale et applications.

-1- Enoncé du théorème.

Définition 1 : Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et V un ouvert de F. Un C^k-difféomorphisme de U sur V est une bijection $f: U \to V$ telle que f et f^{-1} soient de classe C^k.

Théorème d'inversion locale : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in U$. Soient $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k et telle que $\det Df(a) \neq 0$.

Alors :

- Il existe V, voisinage ouvert de a dans U.
- Il existe W, voisinage ouvert de $f(a)$ dans $\mathbb{R}^n$.

de sorte que f soit un C^k-difféomorphisme de V sur W.

Nous avons ainsi : $\left(x \in V, y = f(x)\right) \Leftrightarrow \left(y \in W, x = f^{-1}(y)\right)$.

Exemple : On considère

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$$

Alors f est un C^∞-difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

-2- Inversion globale.

Vu l'exemple précédent, cette question nous semble naturelle. On dispose alors du résultat suivant :

Théorème : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k. On suppose que f est injective sur U et que $\det Df(x) \neq 0, \forall x \in U$.

Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un C^k-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Remarque : On dispose d'un résultat de Hadamard plus fort que le précédent (voir le livre de Zuily-Queffélec).

-3- Changement de coordonnées locales. Lemme de Morse.

Définition 2 : Soient V et W deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Un changement de coordonnées sur V est la donnée d'un C^k-difféomorphisme de V sur W.

Exemple : Le paramétrage en coordonnées polaires.

$$]0;+\infty[\cup]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-$$
$$(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Lemme de Morse : Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^3 telle que $D^2 f(0,0)$ soit non dégénérée. On note alors (ε, η) la signature de $D^2 f(0,0)$.

Alors il existe un changement de coordonnées locales au voisinage de l'origine $(x,y) \mapsto (u,v)$ tel que $f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = \varepsilon u^2(x,y) + \eta v^2(x,y)$

Application : Ce lemme de Morse est utile pour étudier la position d'une surface par rapport à son plan tangent.

-III- Le théorème des fonctions implicites.

-1- Enoncé du théorème.

Théorème des fonctions implicites : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^k. Soit $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0$ et $\det D_y f(a,b) \neq 0$.
Alors :

- Il existe V, voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$,
- Il existe W, voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$, avec $V \times W \subset U$,
- Il existe $\varphi : V \to W$ de classe C^k,

de sorte que :

$$\begin{pmatrix} (x,y) \in V \times W \\ f(x,y) = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \in V \\ y = \varphi(x) \end{pmatrix}$$

- On dit alors que φ est la fonction implicite définie par f au voisinage de $(a,b) \in U$.
- On de plus $D\varphi(x) = -\left(D_y f(x,\varphi(x))\right)^{-1} \circ D_x f(x,\varphi(x))$, pour tout $x \in V$.

Ce théorème exprime en fait que la courbe (ou surface) implicite définie par f est localement (au voisinage de (a,b)) le graphe de la fonction φ.

Exemple : On prend $n = p = 1$ et $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. On définit le folium de Descartes par $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = 0\right\}$. Alors y est définie comme fonction de x au voisinage de tout point de C sauf $(0,0)$ et $\left(2^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}\right)$.

-2- Le théorème des extrema liés de Lagrange.

Théorème : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $f, g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On note $X = \left\{x \in U / g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\right\}$.
On suppose que f admet un extremum relatif en $a \in X$ et que $Dg_1(a), \dots, Dg_r(a)$ soient linéairement indépendantes.
Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ (*multiplicateurs de Lagrange*) tels que :

$$Df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Dg_i(a)$$

Ce théorème s'applique aux problèmes de minimisation sous contraintes. Par exemple : $g(x,y) = xy - 1$, $f(M) = MA + MB$ avec $A(-1,0)$ et $B(0,1)$.

-3- Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ définies implicitement.

Ce paragraphe n'est pas essentiel et on peut l'éviter si on ne maîtrise pas bien le sujet.

On rappelle brièvement qu'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension d et de classe C^k, est une partie de $\mathbb{R}^n$ qui peut se ramener localement, via un C^k-difféomorphisme, à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension d (donc à $\mathbb{R}^d$).

L'espace tangent d'une telle sous-variété en un point a est l'ensemble des vecteurs tangents aux courbes passant par a tracées sur la sous-variété en question. On peut alors démontrer que c'est un espace vectoriel de dimension d.

Voici un théorème concernant les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ définies de manière implicite.

Théorème : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $g_1,\dots,g_r : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On note $X = \{x \in U \,/\, g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.

On suppose que $Dg_1(x),\dots,Dg_r(x)$ soient linéairement indépendantes, pour tout $x \in X$.

Alors :

- X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-r$.
- Pour tout $a \in X$, $T_a X = \bigcap_{i=1}^{r} \ker Dg_i(a)$, où $T_a X$ désigne l'espace tangent de X au point a.

Ce théorème permet alors de retrouver le théorème des extrema liés de Lagrange.

Développement 1 : voir Rouvière.
Développement 2 : voir Gourdon.
